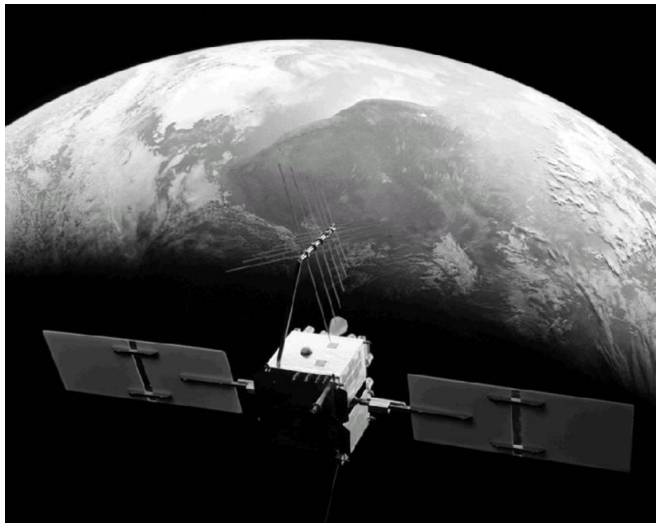
GPS: Fundamentos, Trilateración estática, y Localización dinámica con Kalman y sensores inerciales



Dr. Antonio Ramón Jiménez Ruiz
Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM)
Ctra. Campo Real km. 0,2 Arganda del Rey (Madrid)
e-mail: antonio.jimenez@csic.es
https://lopsi.car.upm-csic.es

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES

CSIC
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Departamento de Electrónica. Universidad de Alcalá de Henares.
Curso 2025/2026

Definición

- **GPS** (Global Positioning System):
  - proporciona:
    - Posición 3D (Latitud-Longitud-Altura),
    - Velocidad (Doppler)
    - Tiempo muy preciso (ns).
  - disponible en:
    - Toda superficie Terrestre (y en espacio),
    - Día/Noche, Condiciones tiempo adversas,
    - Si hay 4 o más satélites visibles.
  - desarrollado por:
    - Departamento de Defensa (USA).



- **GNSS** (Global Navigation Satellite System):
  - GPS/NavStar (USA) – operativo 24 sat. 94
  - GLONASS (URSS) – operativo 31 sat.1996
  - Beidu2 (China) (ya operativo, 30 sat. 2020)
  - Galileo (Europa) (ya operativo, 30 sat. 2020)



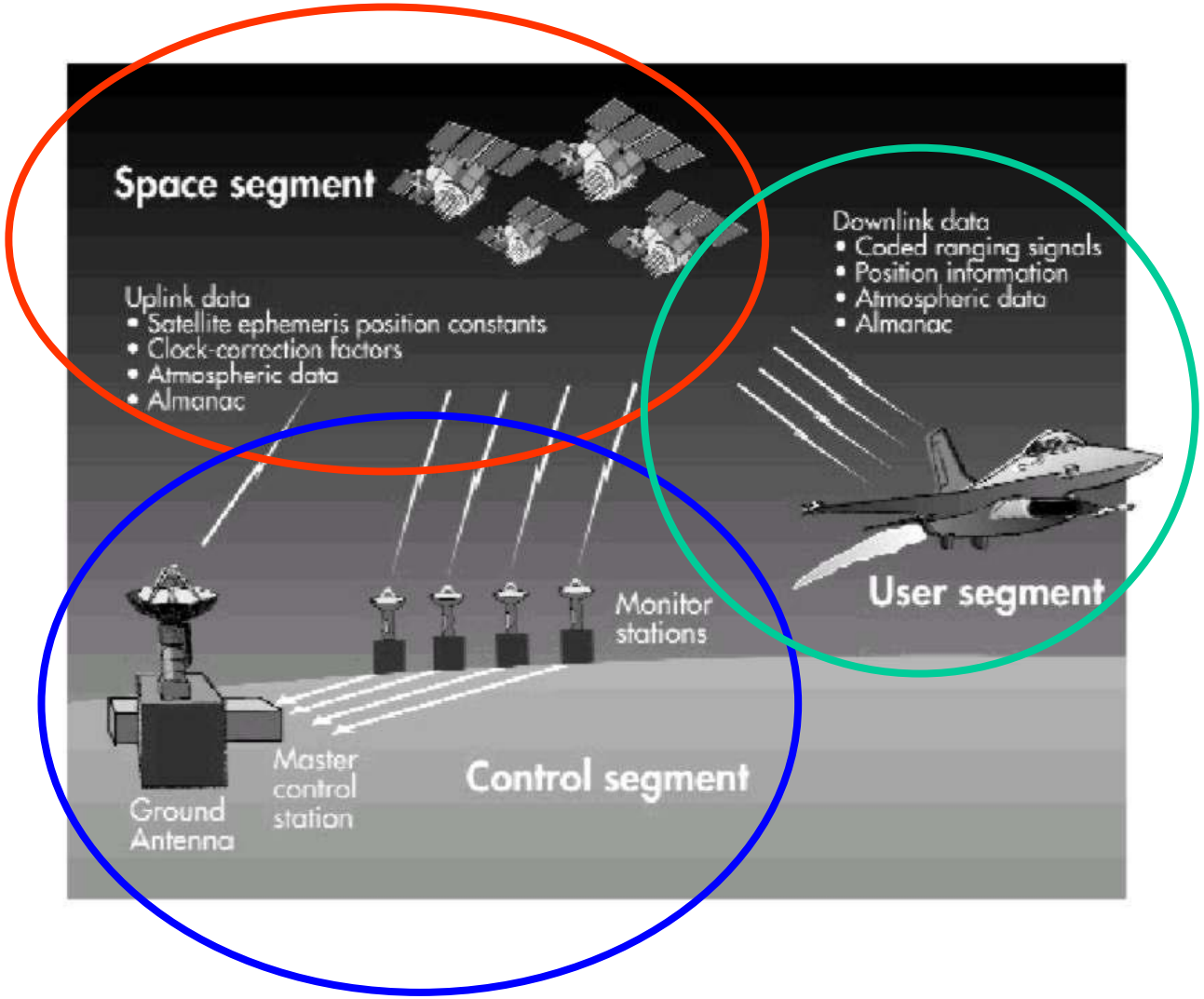
An Air Force-launched Delta II carried the 18th GPS satellite into orbit in February 1993. By March 1994, all 24 GPS satellites were orbiting the Earth.

Tabla de contenidos

- 1. Fundamentos GPS
- 2. Localización con GPS y Trilateración Estática
- 3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro de Kalman
- 4. Navegación Inercial (INS) y su integración con GPS
- Referencias

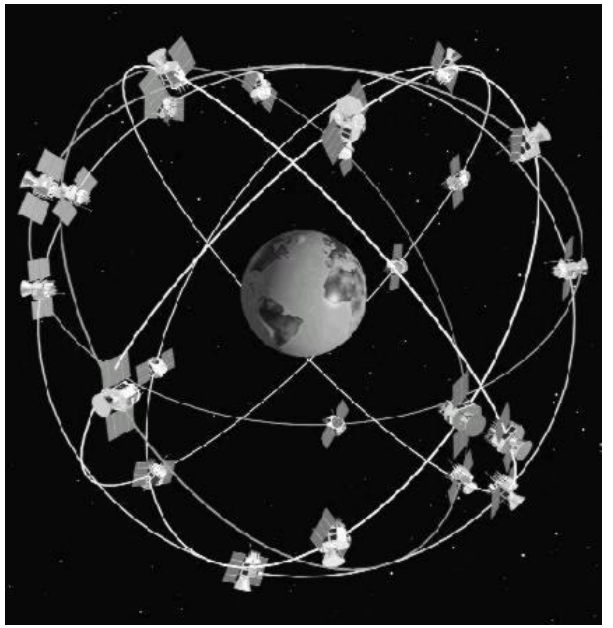
1. Fundamentos GPS: Los segmentos

- La infraestructura GPS se divide en tres segmentos:
  - **Segmento espacio**: mínimo de 24 satélites orbitando (31 sat.)
  - **Segmento de control**: 5 estaciones de control de satélites
  - **Segmento de usuario**: Los receptores de mano o embarcados

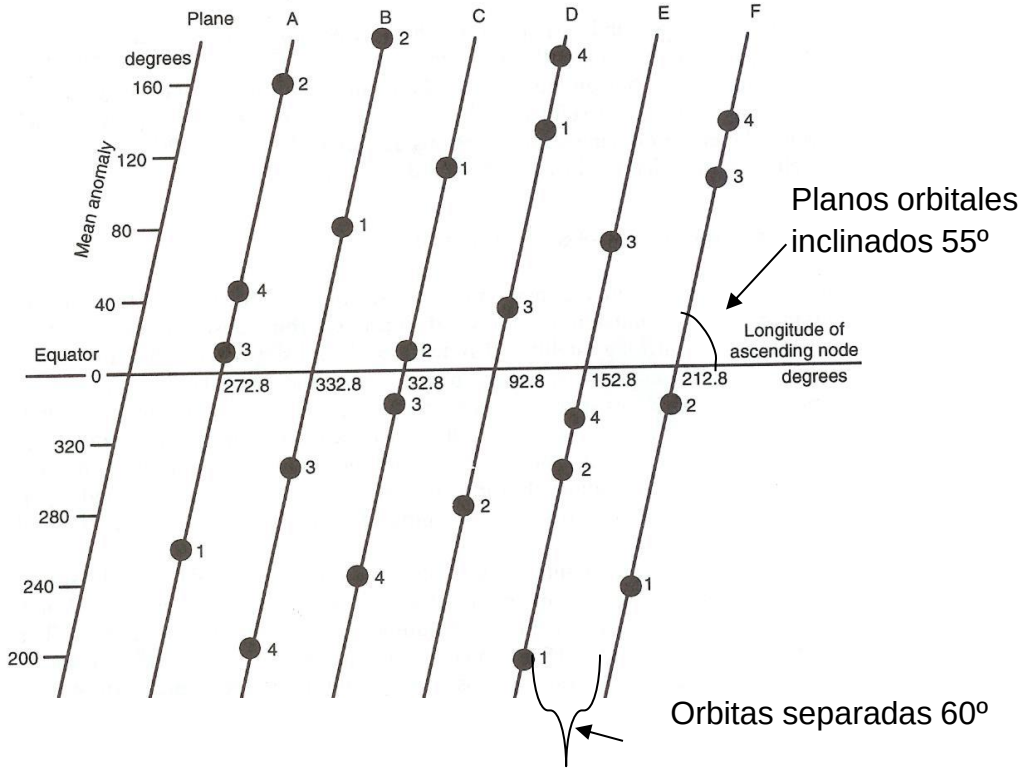


1. Fundamentos GPS: Los segmentos
El Segmento Espacio

- 24 Satélites orbitando circularmente a:
  - 20.200 km de la superficie. Órbitas MEO (Medium Earth Orbit)
  - 26.560 km del centro de masa (e<0.01)



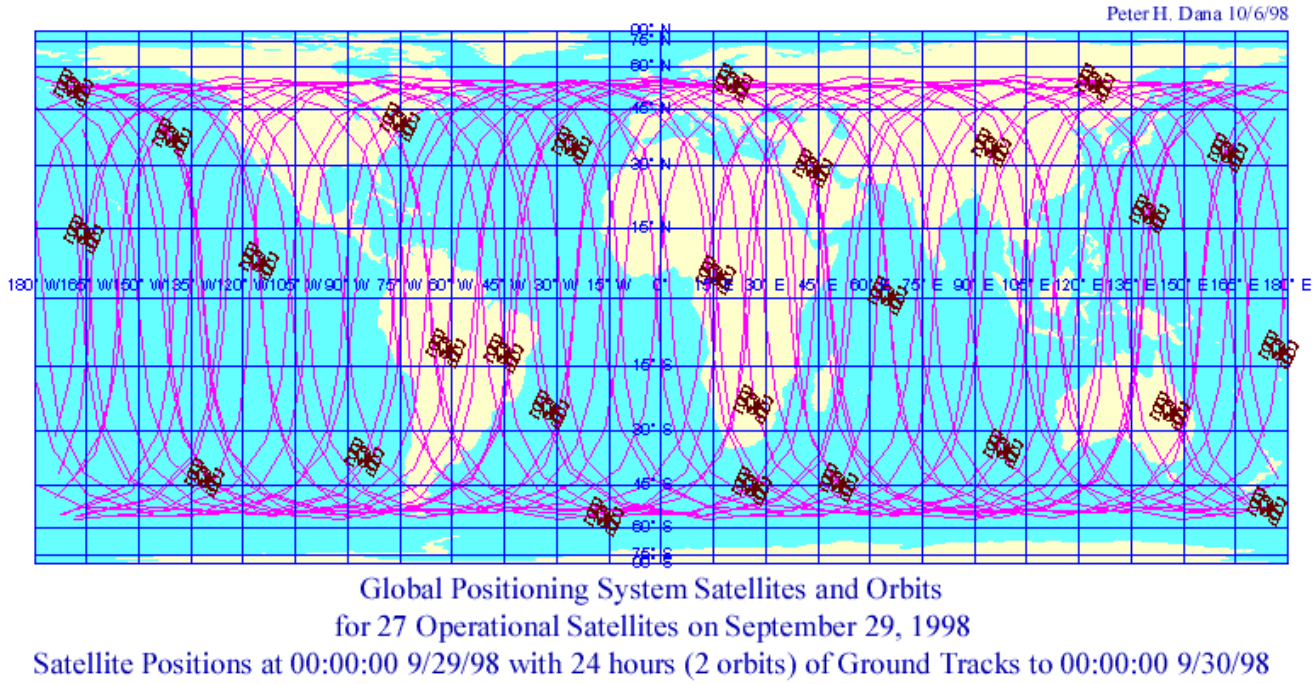
Órbitas proyectadas sobre un plano:

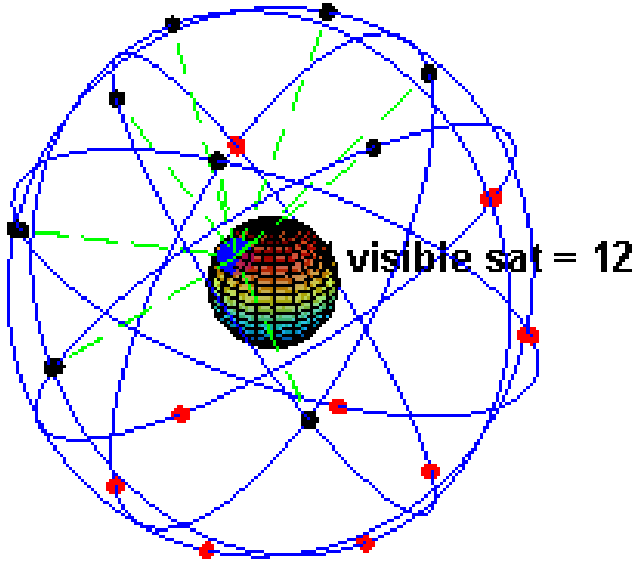


- 6 Órbitas :
  - 4 satélites cada órbita
  - Espaciadas 60º sobre ecuador
  - Inclinadas 55º respecto plano ecuatorial
  - Tiempo de órbita: 11h:58’ (dos vueltas a la Tierra al día)

El Segmento Espacio

- Visibilidad de satélites garantizada por diseño de órbitas:
  - Los satélites no son geoestacionarios (se mueven sobre nuestras “cabezas”)



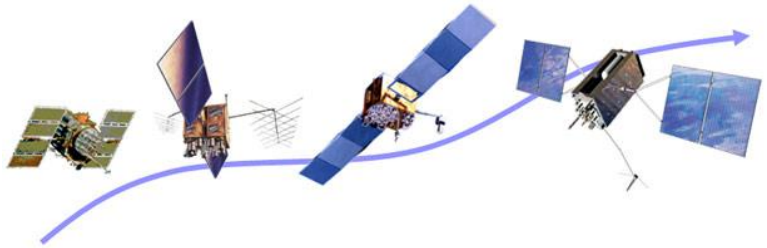


- Teóricamente se verán siempre más de 4 satélites desde cualquier lugar en la Tierra :

1. Fundamentos GPS: Los segmentos

El Segmento Espacio

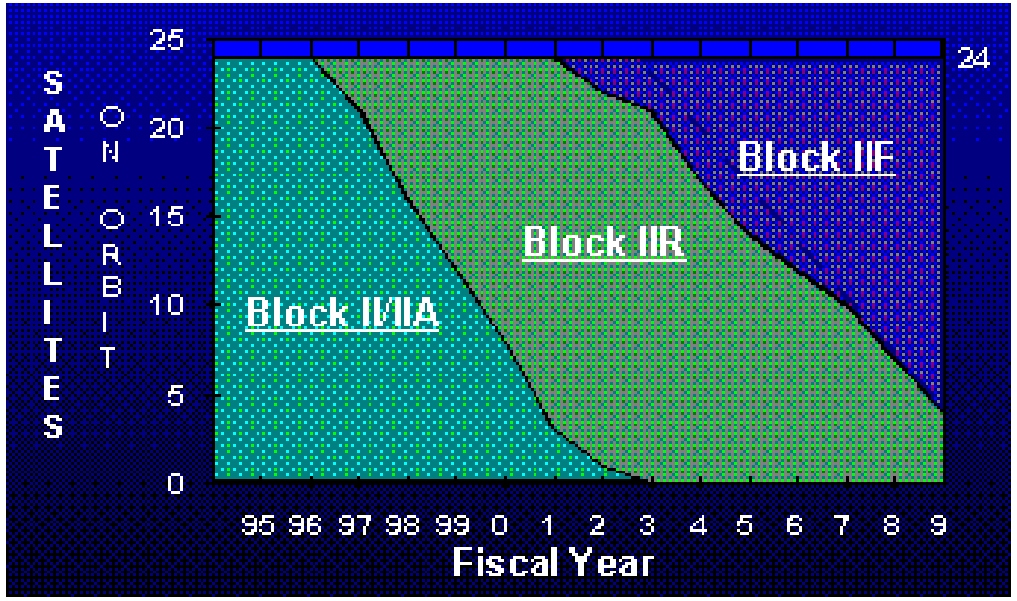
- Tipos de Satélites:



  - Block I (prototipos validación).
  - Block II/IIA (más robustos y seguros: SA y AS)
  - Block IIR/IIF (comunicación entre satélites)
  - Block III (nuevas señales y mayor potencia)

Masa	930 kg
Tamaño	5.1 metros
Velocidad	4 km/s (14.000 km/h)
Transmite	L1:1575.42 L2:1227.60 MHz L5: 1176.45 MHz (New)
Recibe	S:1783.74 MHz
Relojes	2 Cesio + 2 rubidio
Vida	[7-15] años

- Lanzamiento y renovación:
  - 10 satélites Block I (desde1978)
  - 24 satélites Block II [89-94]
    (24 h. operativo)
  - Block IIR [1997-2002]. +Reloj Rubidio
  - Block IIF [2003-2016]. +L5 (aviación)
  - Block III [2018-actualidad]. +Potencia +M-code (Militar)
    mejorada con BOC. +Láser y +Búsqueda y rescate



1. Fundamentos GPS: Los segmentos

El Segmento Espacio

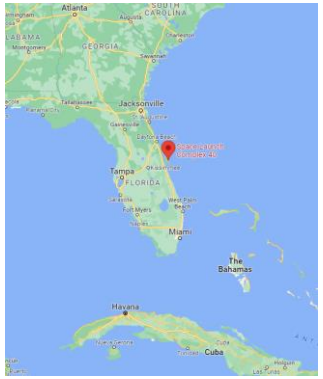
- Planificación de lanzamientos (Block-III):

Satellite	Launch (UTC)	Carrier rocket	Launch site	Block	No.	SVN	PRN	Slot	LOS[note 1]	Status
USA-266	5 February 2016 13:38	Atlas V 401	CCAFS, SLC-41	IIF	12	70	32	F1	3,735	*Operational*[103]
USA-289 *Vespucci*[104]	23 December 2018 13:51	Falcon 9 Block 5	CCAFS, SLC-40	III	1	74	04	F4	2,683	*Operational*[105]
USA-293 *Magellan*	22 August 2019 13:06	Delta IV M+ (4,2)	CCAFS, SLC-37B	III	2	75	18	D6	2,441	*Operational*[106]
USA-304 *Matthew Henson*	30 June 2020 20:10:46	Falcon 9 Block 5	CCAFS, SLC-40	III	3	76	23	E5	2,128	*Operational*[107]
	Initially nicknamed *Columbus*.[108][109]									
USA-309 *Sacagawea*	5 November 2020 23:24:23	Falcon 9 Block 5	CCAFS, SLC-40	III	4	77	14	B6	2,000	*Operational*[110]
USA-319 *Neil Armstrong*	17 June 2021 16:09[111]	Falcon 9 Block 5[112]	CCSFS, SLC-40[113]	III	5	78	11	D5	1,776	*Operational*[114]
USA-343 *Amelia Earhart*	18 January 2023 12:24	Falcon 9 Block 5	CCSFS, SLC-40	III	6	79	28	A6	1,196	*Operational*[115]
USA-440 *Sally Ride*	17 December 2024 00:52	Falcon 9 Block 5	CCSFS, SLC-40	III	7	80	01	D2	497	*Operational*[116][117]
	Originally contracted for launch on United Launch Alliance's Vulcan rocket; re-assigned to a Falcon 9 launch under the name Rapid Response Trailblazer-1 (RRT-1) within 6 months of launch due to Vulcan's unavailability and to demonstrate United States Space Force's ability to undergo responsive satellite mission planning.[118]									
USA-545 *Katherine Johnson*	30 May 2025 17:37	Falcon 9 Block 5	CCSFS, SLC-40	III	8	81	21	E6	333	*Operational*[119]
USA-581 *Ellison Onizuka*	28 January 2026 04:53	Falcon 9 Block 5	CCSFS, SLC-40	III	9	82	20	F5	90	*Operational*[120][121]
	21 April 2026 06:53	Falcon 9 Block 5	CCSFS, SLC-40	III	10	83			7	*Commissioning*

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_GPS_satellites

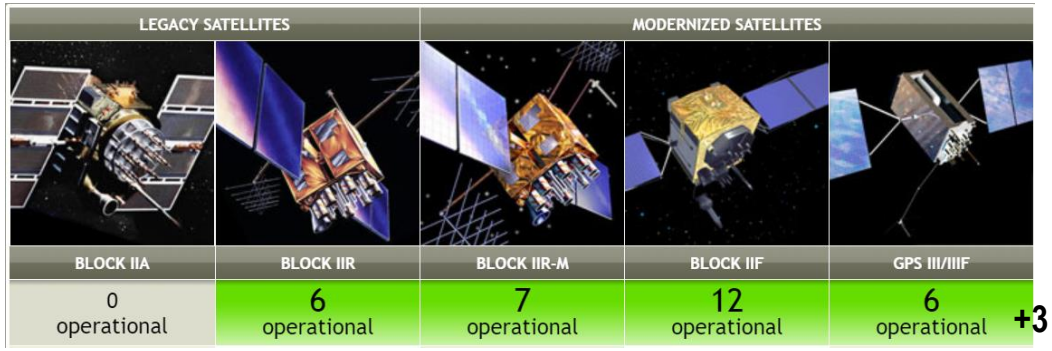
Cada año se lanza un satélite nuevo
último Block III: 21 abril 2026 (con cohete Falcon 9 de SpaceX)





Cape Canaveral Space Force Station (CCSFS), Florida

- Situación en abril-2026:

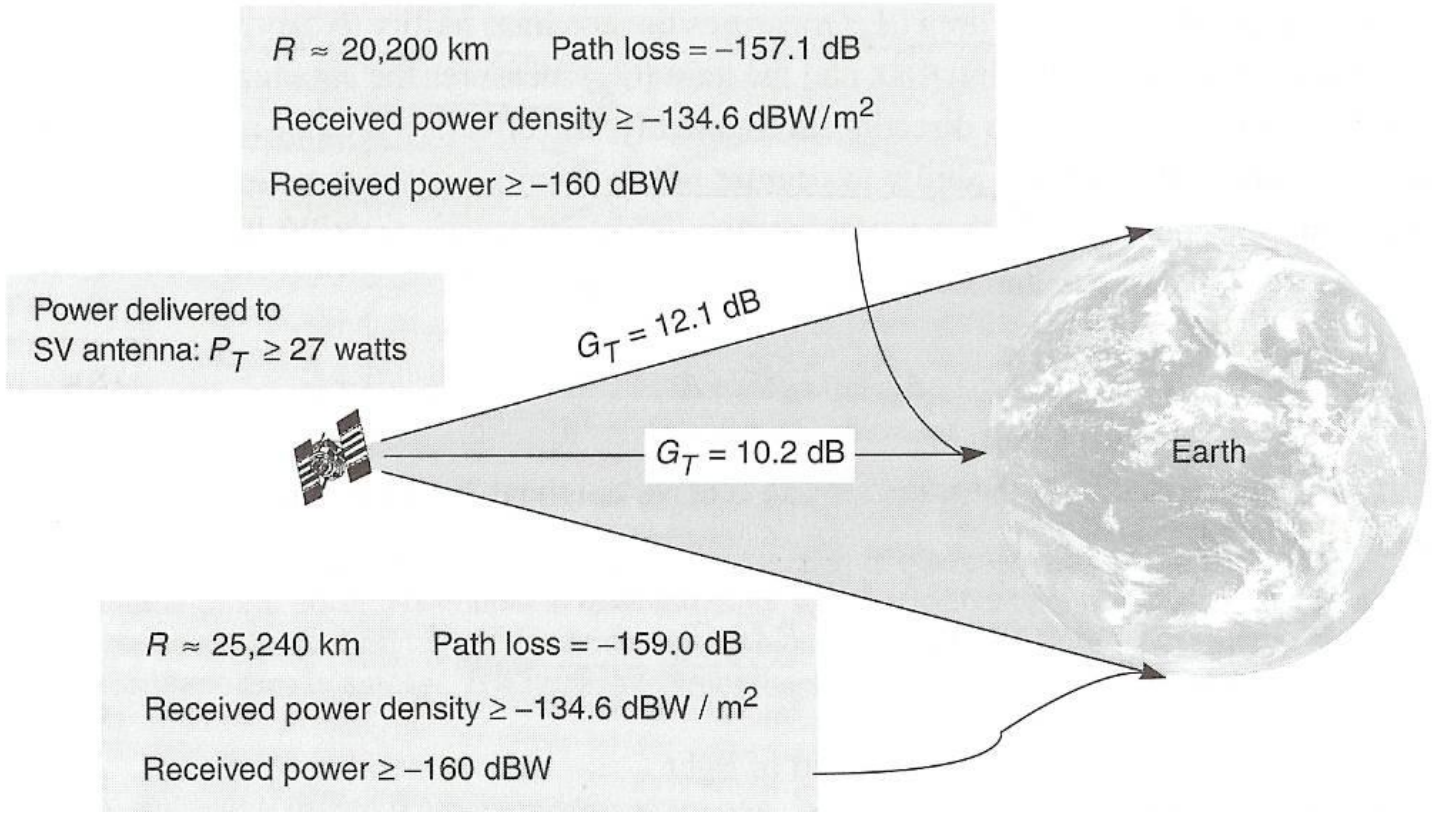


+3 (SV09 en enero 2026)

En total hay 32 satélites
(>24 mínimo diseño)

El Segmento Espacio

- Antena del Satélite: *Ganancia conformada* para tener señal uniforme:
  - Potencias parecidas en recepción independientemente de la elevación del satélite sobre el horizonte (y por tanto de la distancia a este)
- La Ganancia G_T es 2 dB mayor en su periferia que en el centro

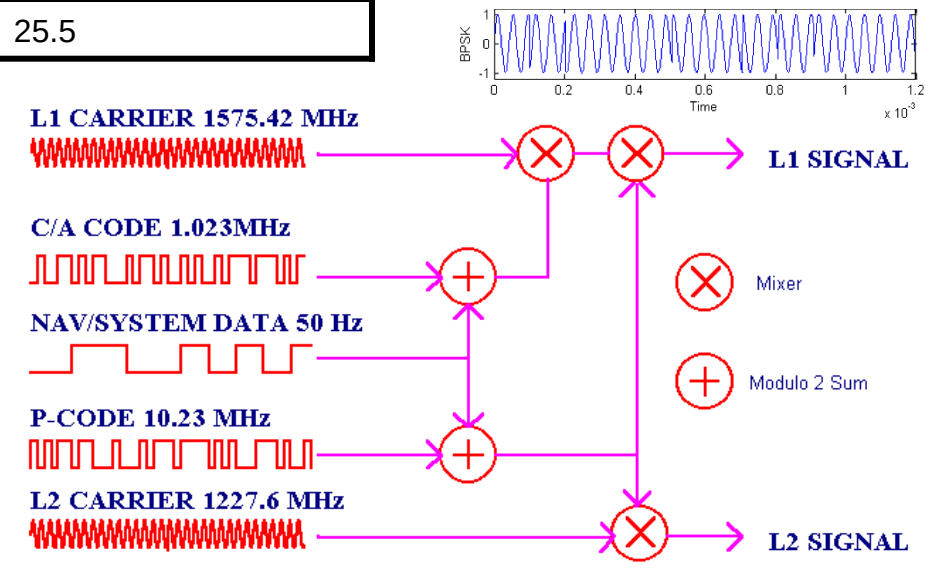


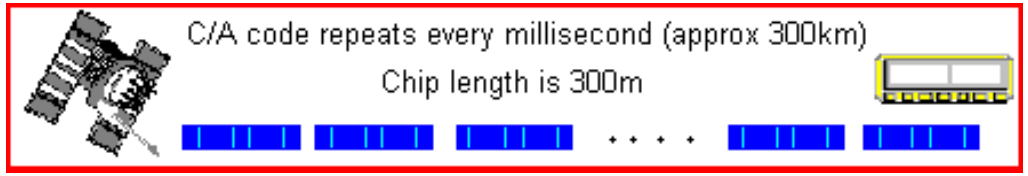
El Segmento Espacio

- Señales transmitidas por satélites:
  - Portadoras L1 y L2/L5 sinusoidales (frecuencia fundamental f_0=10.23 MHz)

Señal	Frecuencia (MHz)	Longitud de Onda (cm)
L1	154 f_0 = 1575.42	19
L2	120 f_0 = 1227.60	24
L5 (New)	115 f_0 = 1176.45	25.5

- Para medir distancias se incluyen códigos pseudoaleatorios (Gold) que modulan con BPSK las portadoras:
  - **C/A** (Coarse/Acquisition) **L1**. Se repite cada 1ms (1023 chips)
  - P (Precise) (repite semanal)
  - **Weil** (New **L5**) (10230 chips)
- Se envía también un mensaje de navegación (Data) con efemérides y almanaque.

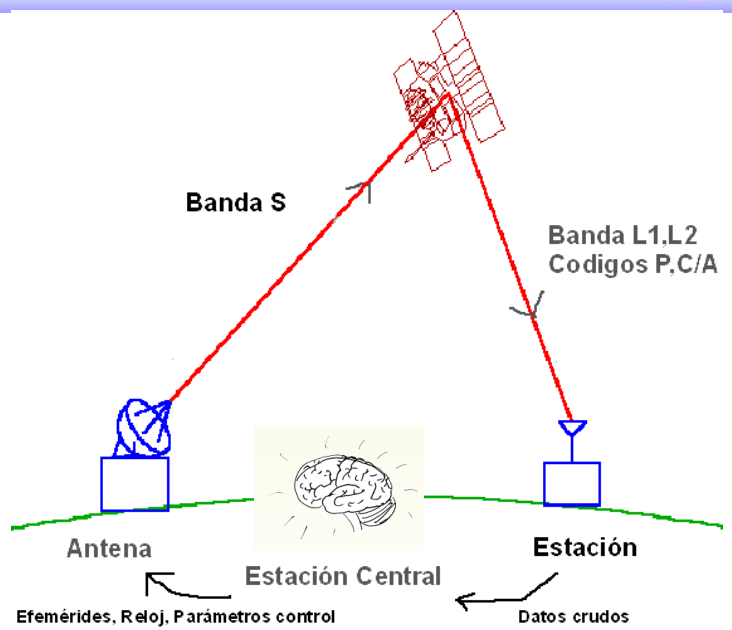




1. Fundamentos GPS: Los segmentos

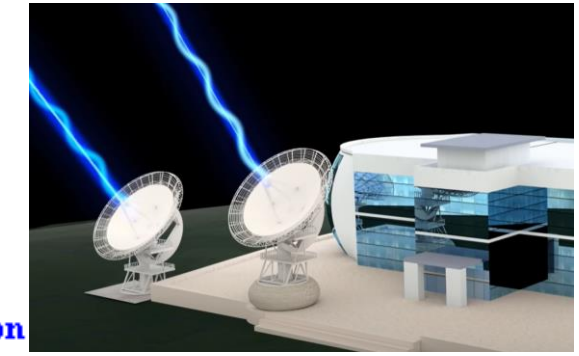
El Segmento de Control

- Operación:
  - 6 estaciones, en posiciones conocidas, reciben las señales L1,L2/L5 de cada satélite (down-link)
  - Envían todos los datos a la estación central, donde se calcula información recalibrado satélites (órbitas satélites: **almanaque** y **efemérides**; Error **reloj**; y Parámetros de control por si hay que reposicionar los satélites)
  - 4 antenas terrestres (banda S) envían info recalibrado a satélites (up-link).





5 estaciones del segmento control
(+ otra en cabo cañaveral): Total 6



El Segmento de Usuario

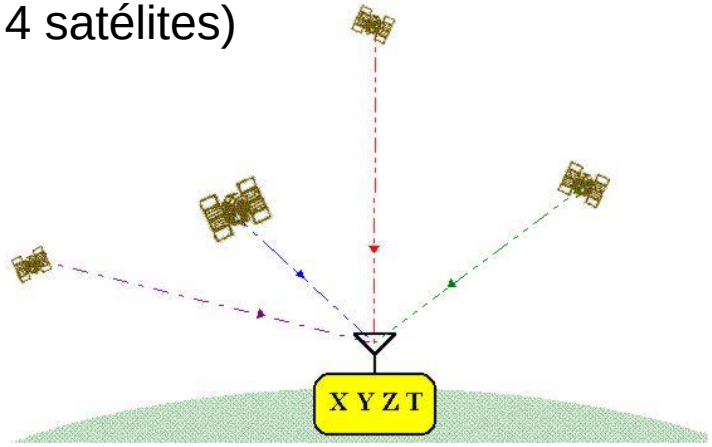
- El segmento de usuario formado por los receptores GPS:







- Características de los receptores:
  - No emiten, solo reciben (“escuchan”) las señales L1 y L2/L5 de los satélites
  - Número de receptores: ILIMITADO
  - Miden rangos a Satélites, y calculan “Posición + Tiempo” (mínimo 4 satélites)
  - Precisiones X-Y:20 m, Z:40 m
  - Precisión mejorada con DGPS (Diferencial):
    - WA-DGPS (INMARSAT, EGNOS): 2-3 metros
    - RTK-DGPS (portadora y estación base): 1-5 cm



El Segmento de Usuario

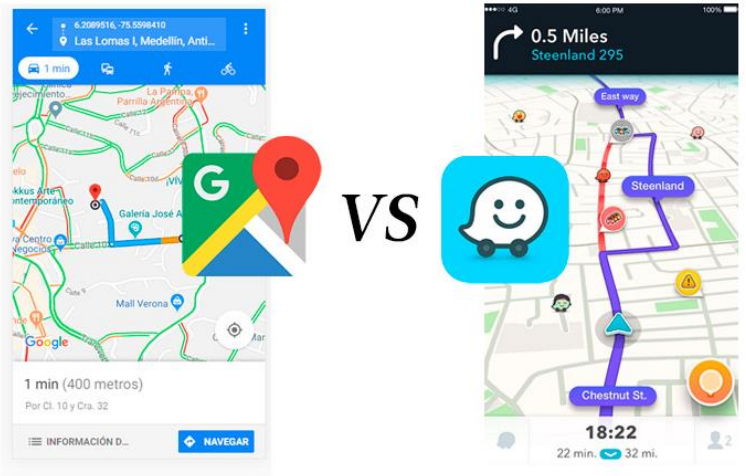
- Procesamiento en un receptor GPS:
  - 1) Acondicionamiento Analógico:
    - Amplificación
    - Conversión frecuencia
    - Digitalización
  - 2) Procesamiento digital:
    - 2.1) Bajo nivel:
      - Estimar Tiempo llegada, Frec Doppler, Offset de portadora

$$(\tau, f_D, \delta\theta)_j$$

de cada una de las señales de *j* satélites visibles

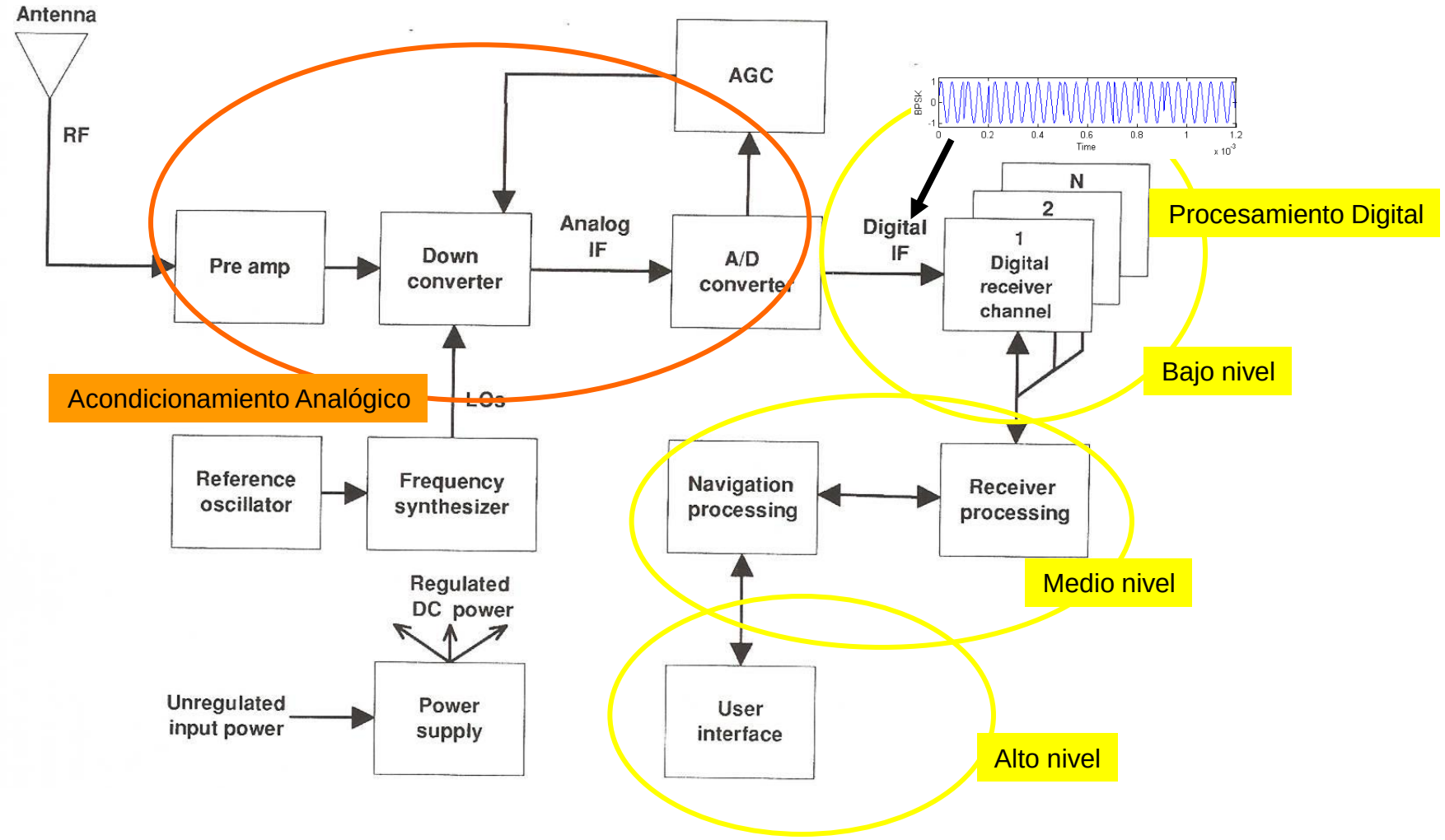
    - 2.2) Medio nivel:
      - Estimar Posición, Velocidad, Tiempo mediante trilateración
    - 2.3) Alto nivel:
      - Utilidades de navegación mediante interfaz con el usuario





El Segmento de Usuario

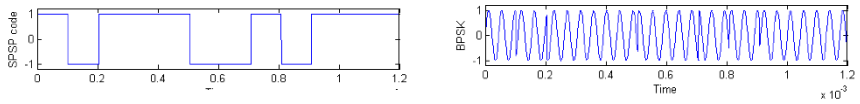
- Diagrama de bloques de un receptor GPS genérico:

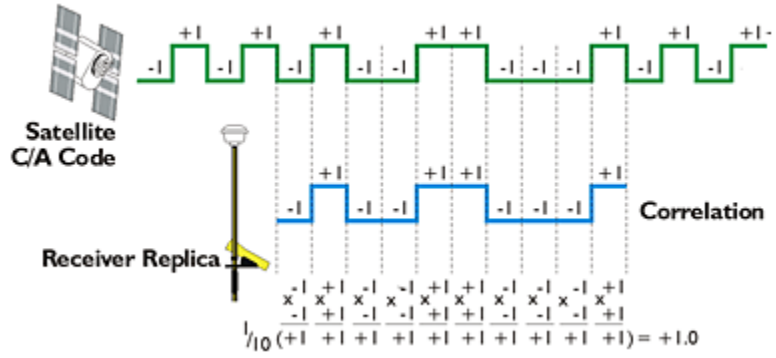


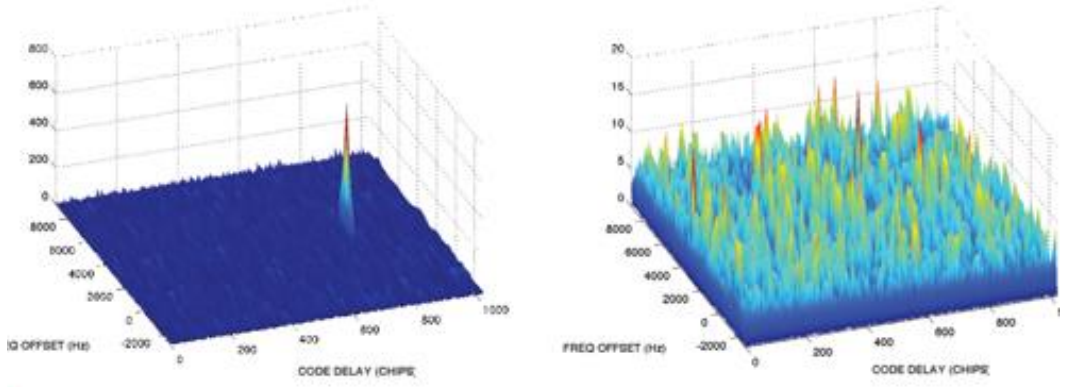
- 2.1) Bajo nivel: El Tiempo llegada, Frec. Doppler y Offset, $(\tau, f_D, \delta\theta)$

  Fase 1) Búsqueda Global (Signal Acquisition)

  - El receptor (en una búsqueda ciega) realiza un barrido de búsqueda de la frecuencia Doppler (F_Search); y a la vez genera una réplica de C/A y la desliza temporalmente en 1023 saltos de chip en chip (D_Search).
  - Este proceso requiere tiempo (cada secuencia C/A se repite cada 1 ms => espacio búsqueda 1023*40 => tarda aprox. 40000 ms=40 seg)
  - Estima groseramente (τ, f_D)



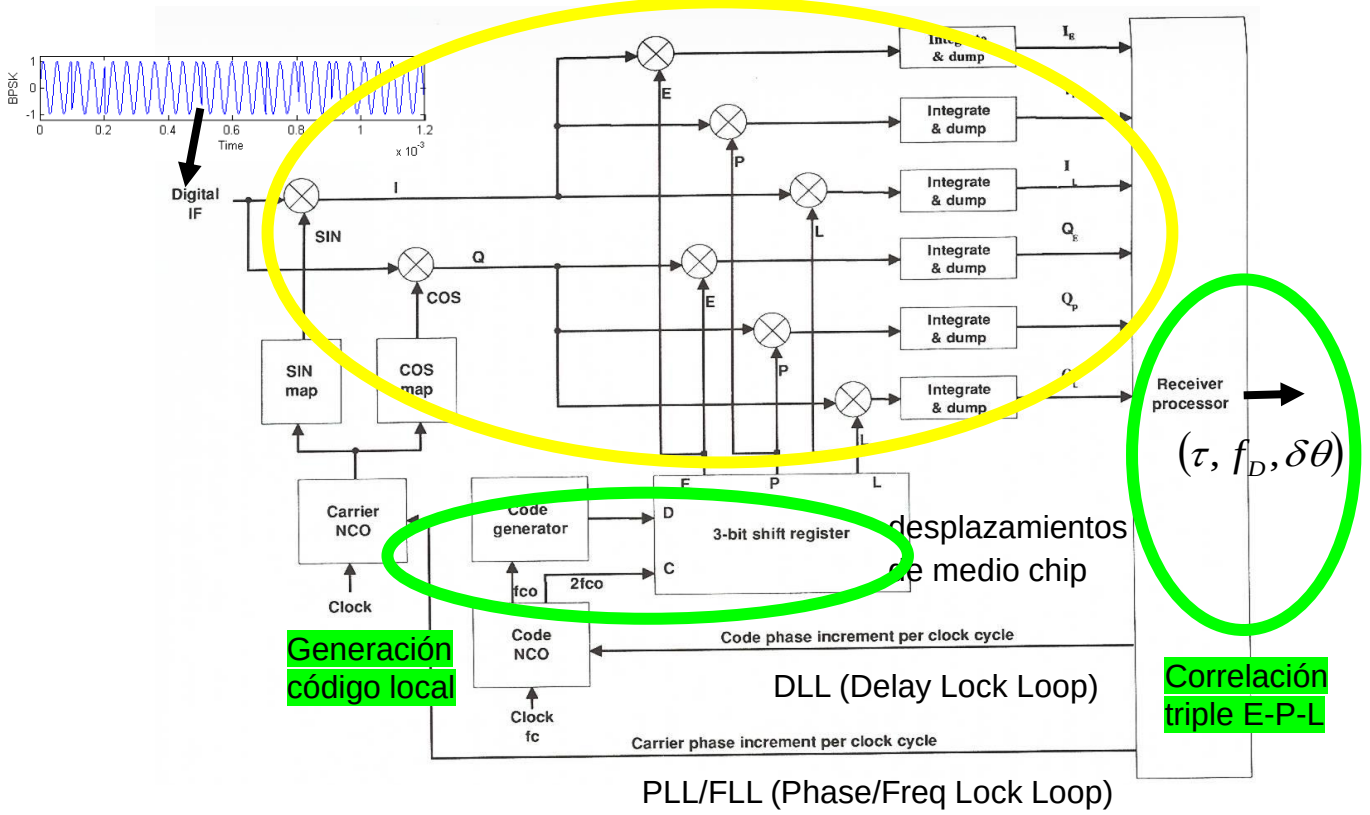




▲ **FIGURE 1** Correlograms for a strong GPS signal (left) and a weak GPS signal (right).

- Fase 2) Búsqueda Local (Tracking)
  - Comienza tras la búsqueda Global nos da un valor aproximado de (τ, f_D)
  - Correladores reconfigurados para hacer el doble tracking (DLL y PLL) en E, P, L:

Demodulación en fase (I) y cuadratura (Q)



Early, Prompt & Late (tracking):

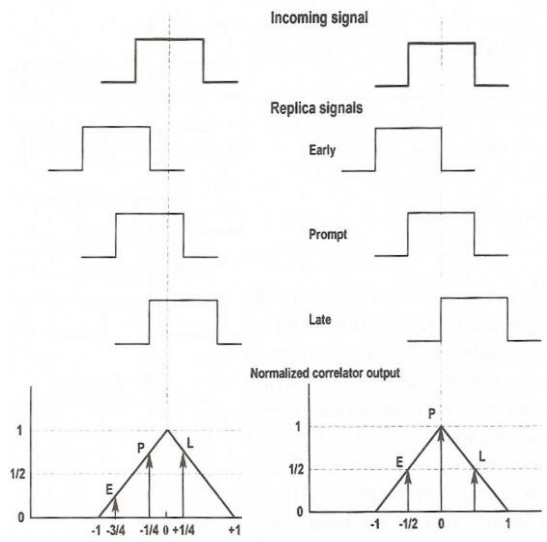


Tabla de contenidos

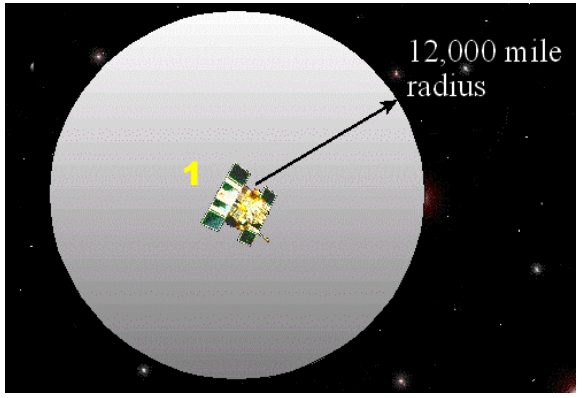
- 1. Fundamentos GPS
- 2. Localización con GPS y Trilateración Estática
- 3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro de Kalman
- 4. Navegación Inercial (INS) y su integración con GPS
- Referencias

2. Localización GPS y Trilateración Estática

- **2.1. Trilateración**
- **2.2. Sistemas de Referencia**
- **2.3. Las órbitas y posición de los satélites**
- **2.4. Determinando la Distancia: Pseudorango**
- **2.5. Posición del Usuario usando Pseudorangos**
- **2.6. Transformación Coordenadas y Modelo de la Tierra**

2. Localización GPS y Trilateración Estática
2.1. Trilateración (1/2)

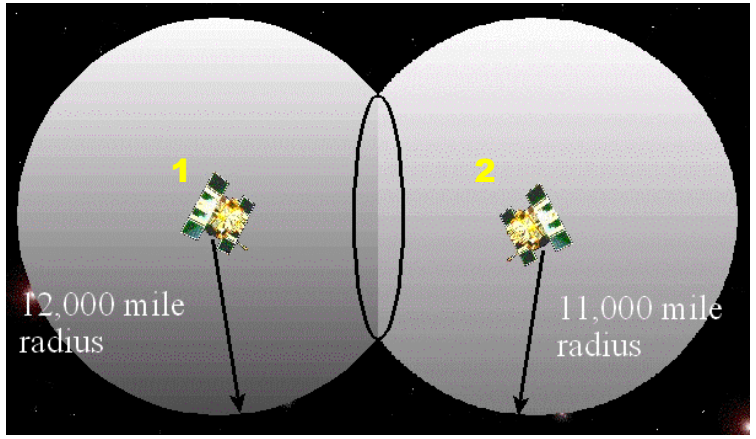
- Def.: “Método para medir posición a partir de distancias”
- Medimos distancia:
  - Si sabemos que estamos a una distancia r_j de un satélite j => podemos estar en cualquier punto de la superficie de la esfera
  - Matemáticamente:



$$r_j^2 = (x_u - x_{sj})^2 + (y_u - y_{sj})^2 + (z_u - z_{sj})^2$$

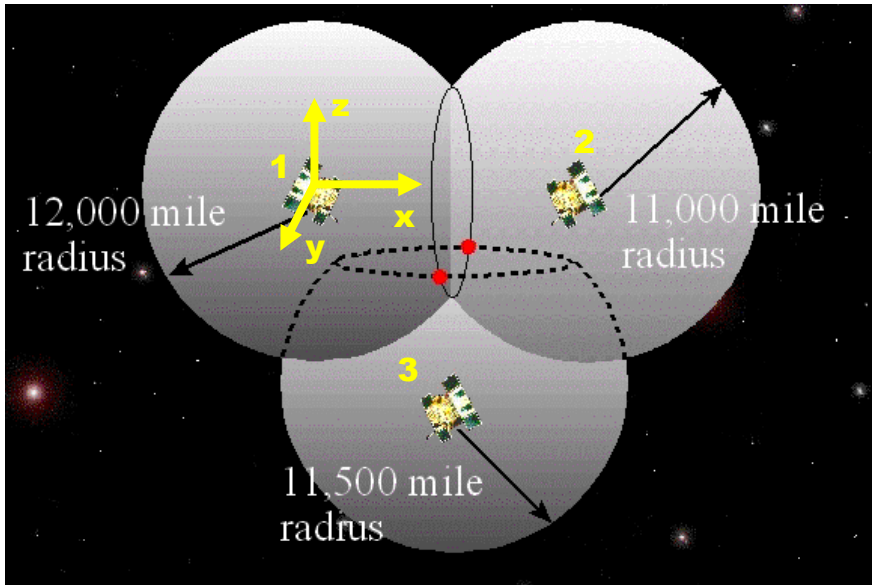
Incógnita	$\mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u)$	Vector de posición del usuario
Conocido	$\mathbf{s}_j = (x_{sj}, y_{sj}, z_{sj})$	Vector de posición del satélite j
	r_j	Rango entre usuario y satélite j

- Midiendo distancia a dos satélites:
  - Generamos la intersección de dos esferas que cortan en general en una circunferencia (o perímetro de un círculo)



- Midiendo distancia a tres satélites:
  - La tercera esfera intersecta la circunferencia en dos puntos
  - Uno de esos dos puntos es la posición real del usuario

- Planteando las tres ecuaciones de las esferas
(ubicando los satélites en $x_{s1}=0, y_{s1}=0, z_{s1}=0, y_{s2}=0, z_{s2}=0$ para simplificar el desarrollo) tenemos:



$$\begin{cases} r_1^2 = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 \\ r_2^2 = (x_u - x_{s2})^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 \\ r_3^2 = (x_u - x_{s3})^2 + (y_u - y_{s3})^2 + (z_u - z_{s3})^2 \end{cases}$$

Cuya solución algebraica es

$$\begin{cases} x_u = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + x_{s2}^2}{2x_{s2}} \\ z_u = \dfrac{r_1^2 - r_3^2 + x_{s3}^2 + z_{s3}^2 - 2x_{s3}x_u}{2z_{s3}} \\ y_u = \pm\sqrt{r_1^2 - x_u^2 - z_u^2} \end{cases}$$

Que como vemos tiene solución doble

- Para un usuario en la superficie de la Tierra, la solución con una altura menor será la válida

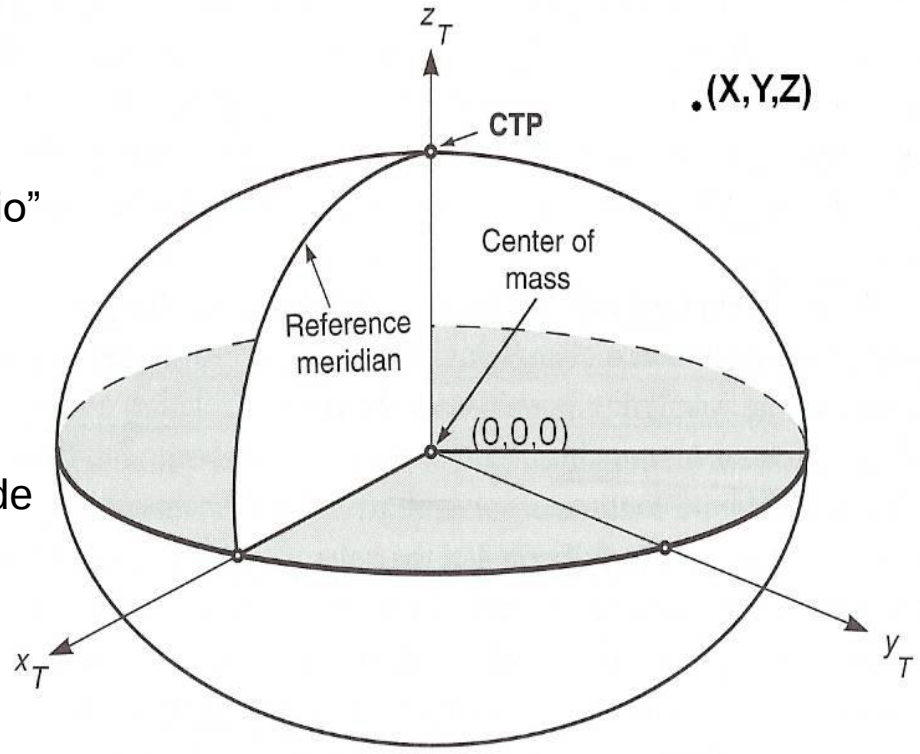
Pero ¿Dónde situamos el origen y el sistema de coordenadas?...

Sistema ECEF (Earth-Centered Earth-Fixed) o Terrestre

- Sistema solidario a la Tierra, con origen (0,0,0) en centro de masas.
- Eje Z pasa por el polo o eje de rotación de la Tierra en “promedio” (CTP-Convetional Terrestial Pole), ya que este no es constante.

- Plano ecuatorial es normal al eje Z, pasado por el centro de masas.
- Eje X definido por intersección de plano ecuatorial y meridiano de referencia (Mean Greenwich Meridian) .

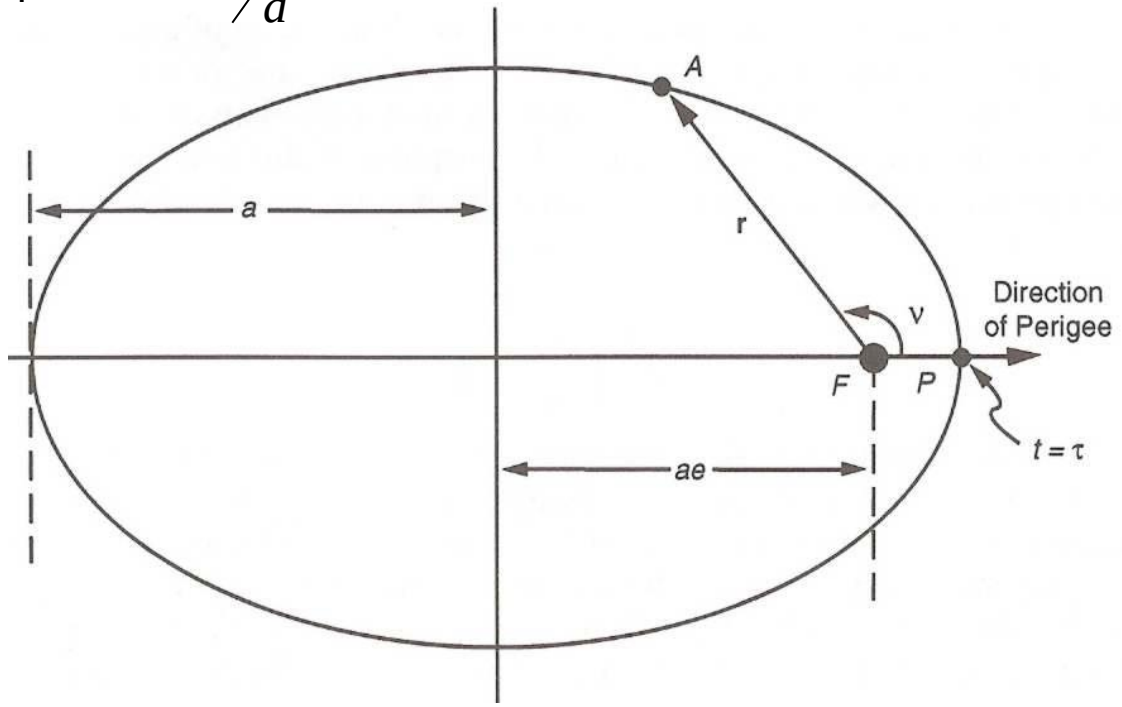
- El Eje Y normal al X y Z (según regla mano derecha).



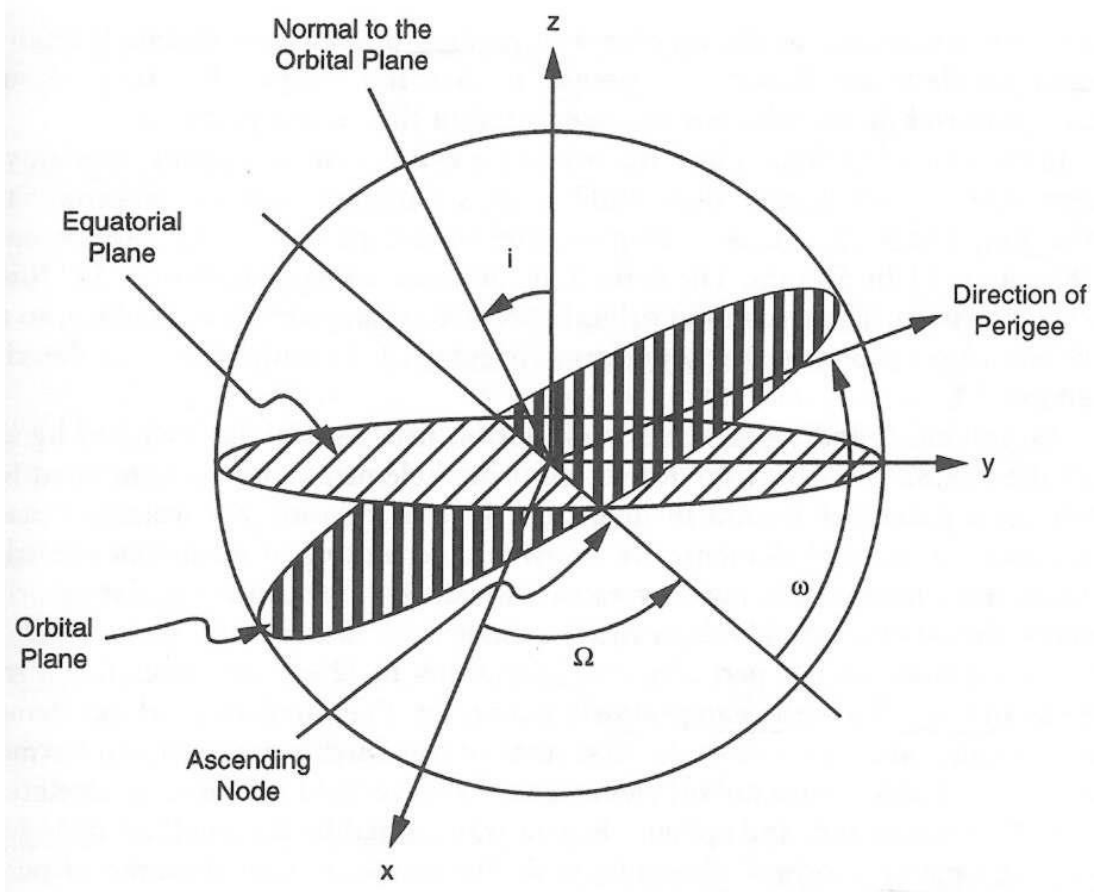
¿Dónde están los satélites respecto a este sistema ECEF de referencia?...

2.3. Las órbitas y posición de los satélites (1/4)

- Mejor una **órbita** que la posición instantánea xyz del satélite
- Parámetros que describen una órbita:
  - Tiempo de Epoch (cuando el satélite está en la posición A) t_{0e}
  - 3 parámetros que dan la **forma** de la órbita y **ubicación** del satélite:
    - Semi-eje mayor de la elipse a
    - Excentricidad de la elipse $e = ae/a$
    - "True Anomaly" ν



- Definición de parámetros (cont.):
  - 3 parámetros definiendo la **orientación** de la órbita
    - Inclinación i : ángulo entre plano ecuatorial Terrestre y plano orbital
    - Longitud nodo ascensión Ω : ángulo en plano ecuatorial cuando plano orbital cruza al ecuatorial con componente +z de velocidad
    - Argumento del Perigeo w : ángulo en plano orbital desde el nodo ascendente a la dirección del perigeo de la órbita
  - 9 parámetros de **corrección**:
    - Ajustan los 6 parámetros anteriores entre los periodos de actualización de las efemérides. p.ej:



$\frac{di}{dt}$ Cambio del ángulo de inclinación $\dot{\Omega}$ Cambio de longitud del nodo de ascensión

2.3. Las órbitas y posición de los satélites (3/4)

- Los parámetros completos definiendo las órbitas son:

Ephemeris parameters in the GPS navigation message

Parameter	Description
t_{0e}	ephemeris reference time
$\sqrt{a}$	square root of the semi-major axis
e	eccentricity
i_0	inclination angle at the reference time
Ω_0	longitude of the ascending note at the beginning of the GPS week
ω	argument of perigee
M_0	mean anomaly at the reference time
Δn	correction to the computed mean motion
$\dot{i}$ (i-dot)	rate of change of inclination with time
$\dot{\Omega}$ (Ω-dot)	rate of change of RAAN with time
C_{uc}, C_{us}	amplitudes of harmonic correction terms for the computed argument of latitude
C_{rc}, C_{rs}	amplitudes of harmonic correction terms for the computed orbit radius
C_{ic}, C_{is}	amplitudes of harmonic correction terms for the computed inclination angle

6 parámetros fundamentales

9 parámetros de corrección

¿Cómo uso estos parámetros para saber dónde están los satélites?...

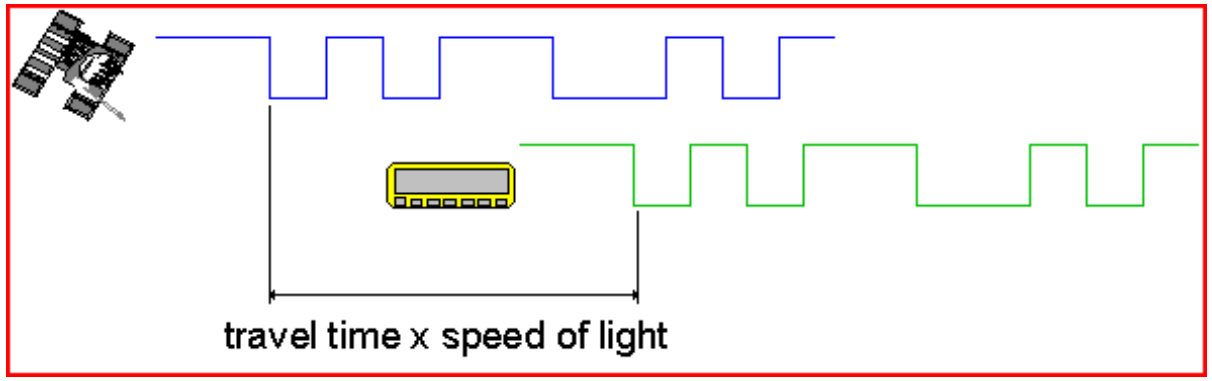
- Algoritmo cálculo de $\mathbf{s}(t) = (x_s, y_s, z_s)$ a partir de efemérides:

(1)	$a = (\sqrt{a})^2$	Semimajor axis
(2)	$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n$	Corrected mean motion
(3)	$t_k = t - t_{0e}$	Time from ephemeris epoch
(4)	$M_k = M_0 + n(t_k)$	Mean anomaly
(5)	$M_k = E_k - e \sin E_k$	Eccentric anomaly (must be solved iteratively for E_k)
(6)	$\sin \nu_k = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1 - e\cos E_k}$ $\cos \nu_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k}$	True anomaly
(7)	$\phi_k = \nu_k + \omega$	Argument of latitude
(8)	$\delta\phi_k = C_{us}\sin(2\phi_k) + C_{uc}\cos(2\phi_k)$	Argument of latitude correction
(9)	$\delta r_k = C_{rs}\sin(2\phi_k) + C_{rc}\cos(2\phi_k)$	Radius correction
(10)	$\delta i_k = C_{is}\sin(2\phi_k) + C_{ic}\cos(2\phi_k)$	Inclination correction
(11)	$u_k = \phi_k + \delta\phi_k$	Corrected argument of latitude
(12)	$r_k = a(1 - e\cos E_k) + \delta r_k$	Corrected radius
(13)	$i_k = i_0 + (di/dt)t_k + \delta i_k$	Corrected inclination
(14)	$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)(t_k) - \dot{\Omega}_e t_{0e}$	Corrected longitude of node
(15)	$x_p = r_k \cos u_k$	In-plane x position
(16)	$y_p = r_k \sin u_k$	In-plane y position
(17)	$x_s = x_p\cos\Omega_k - y_p\cos i_k \sin\Omega_k$	ECEF x-coordinate
(18)	$y_s = x_p\sin\Omega_k + y_p\cos i_k\cos\Omega_k$	ECEF y-coordinate
(19)	$z_s = y_p \sin i_k$	ECEF z-coordinate

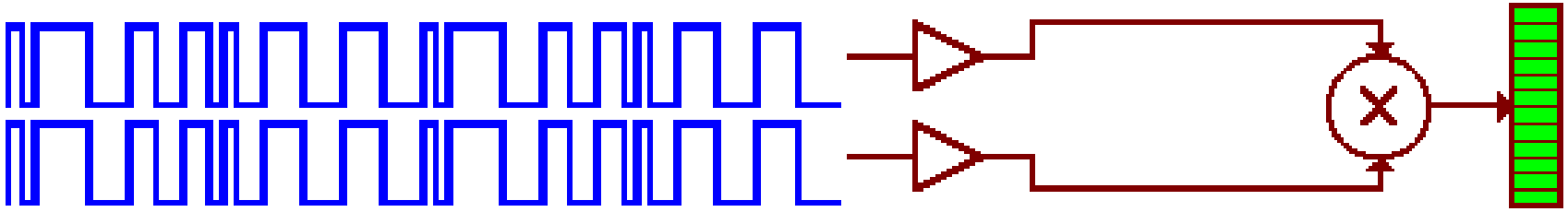
Pero ¿Cómo mido ahora la distancia entre uno de los satélites y el usuario?...

2.4. Determinando la Distancia: Pseudorango (1/2)

- Caso Ideal: Satélite y Receptor GPS perfectamente sincronizados
  - El receptor genera continuamente una réplica del código C/A, simulando lo que hace el satélite en tiempo real
  - Al mismo tiempo el receptor recibe por la antena el código C/A transmitido con un cierto retardo.



  - El TOF se obtiene desplazando un tren de códigos sobre el otro hasta obtener la máxima correlación. Ese desplazamiento es el TOF.



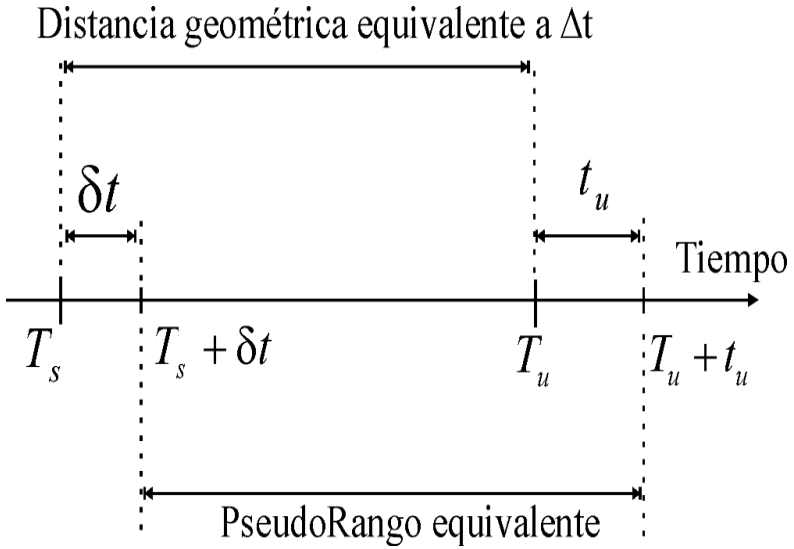
- Caso Real: Ausencia de sincronismo
  - El rango calculado en el receptor se conoce como pseudorango, ρ, ya que contiene:
    - La distancia geométrica o rango real: $r = c(T_u - T_s) = c \cdot \Delta t$
    - Error en tiempo entre tiempo universal y reloj receptor: t_u
    - Error en tiempo entre tiempo universal y reloj del satélite: δt

$$\rho = c[(T_u + t_u) - (T_s + \delta t)] = c(T_u - T_s) + c(t_u - \delta t) = r + c(t_u - \delta t)$$

$$\boxed{\rho = r + c(t_u - \delta t)}$$

Incógnita a estimar

Aunque δt(< 1mseg) es conocido mediante la efemérides, pero no t_u

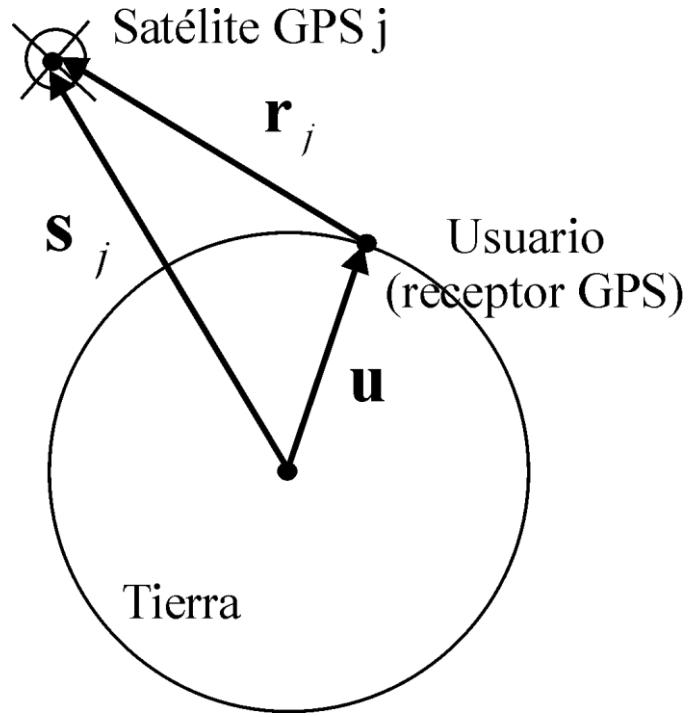


T_s	Tiempo de Sistema en que se generó la señal en el satélite
T_u	Tiempo de Sistema en que se recibió la señal en receptor
$T_s + \delta t$	Tiempo en que se generó la señal según reloj de Satélite
$T_u + t_u$	Tiempo en que se recibió la señal según reloj receptor
c	Velocidad de la luz: 300.000 km/s

2.5. Posición del Usuario usando Pseudorangos (1/5)

- Objetivo: Calcular posición del usuario $\mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u)$ y el error de sincronismo t_u
  - Definimos los vectores de posición de los satélites y del usuario (incógnita) referidos a ECEF:

$\mathbf{u} = (x_u, y_u, z_u)$	Vector de posición del usuario
$\mathbf{s}_j = (x_{sj}, y_{sj}, z_{sj})$	Vector de posición del satélite j
$\mathbf{r}_j$	Vector del satélite j al usuario
$r_j = \lvert\mathbf{r}_j\rvert$	Rango ideal o verdadero



  - Se necesitan al menos 4 medidas de pseudorango, ρ_j , a satélites

  - Con ellos se plantea un sistema de ecuaciones, que representa el corte en la posición del usuario de varias esferas centradas en los satélites

$$\rho_j = \lvert\mathbf{r}_j\rvert + c \cdot t_u = r_j + c \cdot t_u \qquad \text{donde j = 1..4 (o más)}$$

$$\rho_j = \sqrt{(x_{sj} - x_u)^2 + (y_{sj} - y_u)^2 + (z_{sj} - z_u)^2} + c \cdot t_u$$

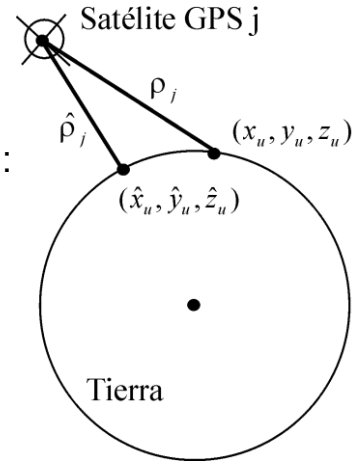
  - Solución **eficiente y flexible** (múltiples satélites) => linealizamos las ecuaciones respecto a los términos desconocidos (usando series de Taylor), y posteriormente se buscará una solución de forma iterativa partiendo de una posición de usuario aproximada (afortunadamente disponible) …

Linealización de las ecuaciones

- Si sabemos aproximadamente donde está la posición del usuario, $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$, podemos calcular la posición del usuario real, (x_u, y_u, z_u) , (análogo para el sincronismo) mediante esta expresión:

$$(x_u, y_u, z_u, t_u) = (\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) + (\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u, \Delta t_u)$$

Incógnitas



- Los pseudorangos aproximados y medidos, que definen una función *f* son:

$$\hat{\rho}_j = \sqrt{(x_{sj} - \hat{x}_u)^2 + (y_{sj} - \hat{y}_u)^2 + (z_{sj} - \hat{z}_u)^2} + c \cdot \hat{t}_u = f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)$$

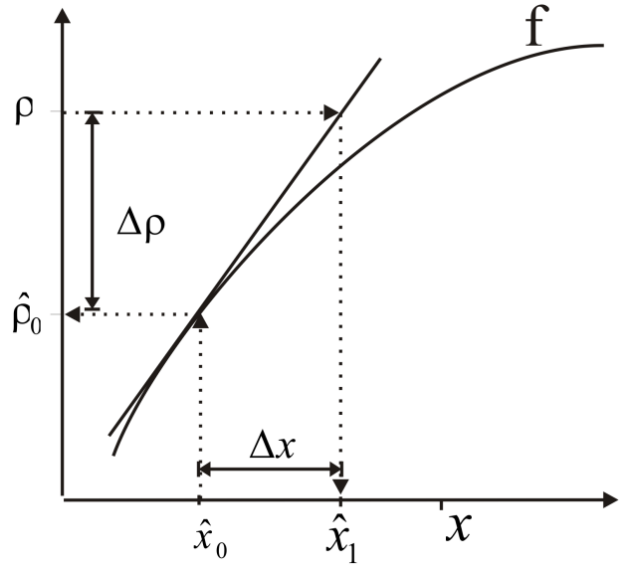
$$\rho_j = \sqrt{(x_{sj} - x_u)^2 + (y_{sj} - y_u)^2 + (z_{sj} - z_u)^2} + c \cdot t_u = f(x_u, y_u, z_u, t_u)$$

- Ahora hacemos una linealización usando series de Taylor:

$$f(x_u, y_u, z_u, t_u) = f(\hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_u + \Delta t_u) =$$

$$= f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{x}_u} \cdot \Delta x_u + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{y}_u} \cdot \Delta y_u +$$

$$+ \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{z}_u} \cdot \Delta z_u + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)}{\partial \hat{t}_u} \cdot \Delta t_u + \ldots$$



- La ecuación linealizada es:

$$\rho_j = \hat{\rho}_j - \frac{x_{sj}-\hat{x}_u}{\hat{r}_j}\Delta x_u - \frac{y_{sj}-\hat{y}_u}{\hat{r}_j}\Delta y_u - \frac{z_{sj}-\hat{z}_u}{\hat{r}_j}\Delta z_u + c\Delta t_u$$

$$\hat{r}_j = \sqrt{(x_{sj}-\hat{x}_u)^2 + (y_{sj}-\hat{y}_u)^2 + (z_{sj}-\hat{z}_u)^2}$$

- Reagrupando términos e introduciendo estas nuevas variables:

$$\begin{cases} \Delta\rho j = \rho_j - \hat{\rho}_j \\ a_{xsj} = \dfrac{\partial f(\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u,\hat{t}_u)}{\partial \hat{x}_u} = -\dfrac{x_{sj}-\hat{x}_u}{\hat{r}_j} \\ a_{ysj} = \dfrac{\partial f(\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u,\hat{t}_u)}{\partial \hat{y}_u} = -\dfrac{y_{sj}-\hat{y}_u}{\hat{r}_j} \\ a_{zsj} = \dfrac{\partial f(\hat{x}_u,\hat{y}_u,\hat{z}_u,\hat{t}_u)}{\partial \hat{z}_u} = -\dfrac{z_{sj}-\hat{z}_u}{\hat{r}_j} \end{cases}$$

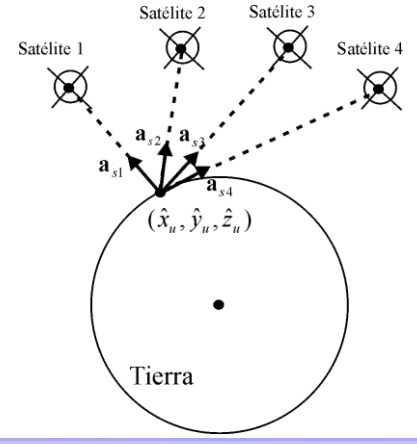
tenemos.. $\Delta\rho_j = a_{xsj}\Delta x_u + a_{ysj}\Delta y_u + a_{zsj}\Delta z_u + c\Delta t_u$

- Como hay 4 incógnitas => pueden averiguarse resolviendo este sistema lineal de ecuaciones (usando el rango medido a 4 satélites):

$$\begin{cases} \Delta\rho_1 = a_{xs1}\Delta x_u + a_{ys1}\Delta y_u + a_{zs1}\Delta z_u + c\Delta t_u \\ \Delta\rho_2 = a_{xs2}\Delta x_u + a_{ys2}\Delta y_u + a_{zs2}\Delta z_u + c\Delta t_u \\ \Delta\rho_3 = a_{xs3}\Delta x_u + a_{ys3}\Delta y_u + a_{zs3}\Delta z_u + c\Delta t_u \\ \Delta\rho_4 = a_{xs4}\Delta x_u + a_{ys4}\Delta y_u + a_{zs4}\Delta z_u + c\Delta t_u \end{cases} \quad \Delta\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{xs1} & a_{ys1} & a_{zs1} & 1 \\ a_{xs2} & a_{ys2} & a_{zs2} & 1 \\ a_{xs3} & a_{ys3} & a_{zs3} & 1 \\ a_{xs4} & a_{ys4} & a_{zs4} & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c\Delta t_u \end{bmatrix}$$

que de forma matricial queda… $\Delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{x}$

y la solución es: $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}$



- Si número de satélites es mayor de 4 => mínimos cuadrados, cuya solución queda así:

$$\Delta\mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}$$

- El algoritmo recursivo es:

Semilla inicial: $\hat{x} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, c\hat{t}_u)$

Pseudorangos medidos ρ_i , for i=1..N

Calcula:

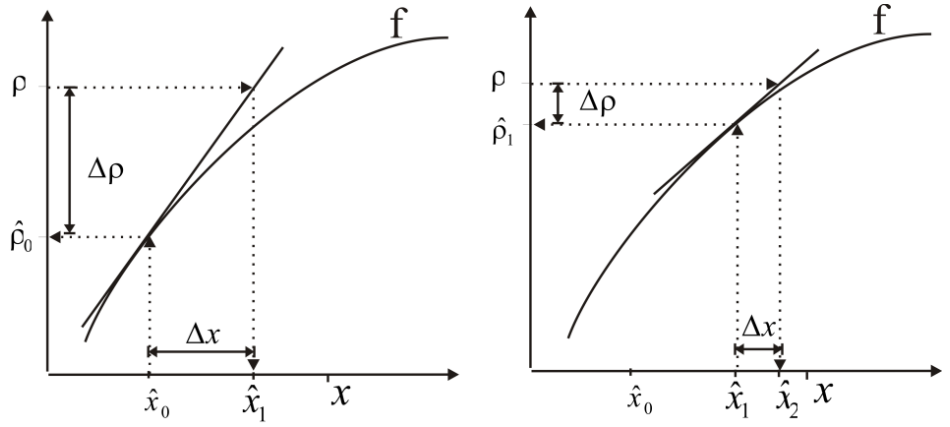
$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{xs1} & a_{ys1} & a_{zs1} & 1 \\ a_{xs2} & a_{ys2} & a_{zs2} & 1 \\ a_{xs3} & a_{ys3} & a_{zs3} & 1 \\ a_{xs4} & a_{ys4} & a_{zs4} & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c\Delta t_u \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \Delta\boldsymbol{\rho}$$

$\Delta x < \varepsilon$?

Si → Fin $x = \hat{x}$

No → $\hat{x} = \hat{x} + \Delta x$



Trilateración estática

2. Localización GPS y Trilateración Estática
2.5. Posición del Usuario usando Pseudorangos (5/5)

- Ejemplo:

j	Satélite	Coordenadas en ECEF (x_{sj}, y_{sj}, z_{sj})		
1	15	15524471.175	-16649826.222	13512272.387
2	27	-2304058.534	-23287906.465	11917038.105
3	31	16680243.357	-3069625.561	20378551.047
4	7	-14799931.395	-21425358.24	6069947.224

- 1) **Conozco**:
  - 1.1) Las coordenadas de los satélites:
  - 1.2) Los pseudorangos: $\rho_1 = 89491.971 \quad \rho_2 = 133930.500 \quad \rho_3 = 283098.754 \quad \rho_4 = 205961.742$
- 2) **Semilla inicial**: Posición aproximada: $\hat{x}_u = -730000 \quad \hat{y}_u = -5440000 \quad \hat{z}_u = 3230000 \quad \hat{t}_u = 0$
- 3) **Calcular Δx ,(H , $\Delta\rho$)** : Incremento corrección:
  - 3.1) Por cada satélite j=1..4 calculo los vectores unitarios apuntando al satélite mediante:

$$\mathbf{a}_{sj} = (a_{xsj}, a_{ysj}, a_{zsj}) \qquad \hat{r}_j = \sqrt{(x_{sj} - \hat{x}_u)^2 + (y_{sj} - \hat{y}_u)^2 + (z_{sj} - \hat{z}_u)^2}$$

$$\begin{cases} a_{xsj} = \dfrac{x_{sj} - \hat{x}_u}{\hat{r}_j} \\ a_{ysj} = \dfrac{y_{sj} - \hat{y}_u}{\hat{r}_j} \\ a_{zsj} = \dfrac{z_{sj} - \hat{z}_u}{\hat{r}_j} \end{cases}$$

  - 3.2) Obtengo las correcciones de posición de receptor:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{s1} & 1 \\ \mathbf{a}_{s2} & 1 \\ \mathbf{a}_{s3} & 1 \\ \mathbf{a}_{s4} & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta\rho_j = \hat{\rho}_j - \rho_j \qquad \hat{\rho}_j = \hat{r}_j + c \cdot \hat{t}_u$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \Delta\boldsymbol{\rho}} \qquad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3186.496 \\ -3791.932 \\ 1193.286 \\ 12345.997 \end{bmatrix}$$

- 4) **Aplico las correcciones Δx** (si son significativas):

$$(x_u, y_u, z_u, t_u) = (\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) + (\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u, \Delta t_u)$$

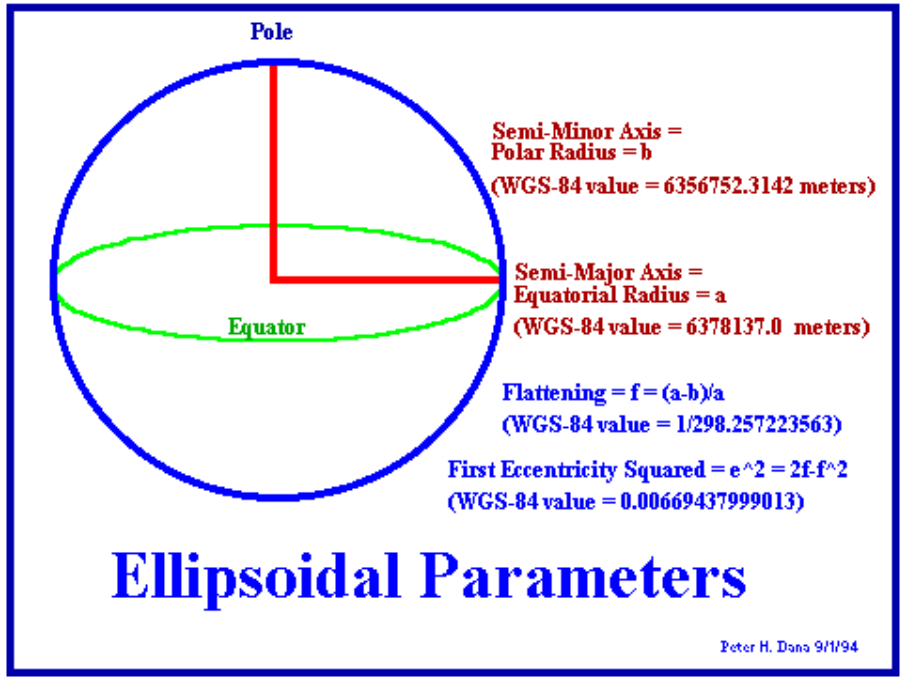
$$(x_u, y_u, z_u, t_u) = (-733186.496, -5443791.932, 3231193.286, 12345.997)$$

¿Localización con cifras muy extrañas?...

2.6. Transf. Coordenadas y Modelo de la Tierra (1/4)

- Objetivos:
  - Poder **transformar** las coordenadas de posición en **ECEF** a coordenadas de **Latitud-Longitud-Altura** (h)
  - Conversión de Altura Elipsoidal (h) a Altura geodésica (H)

- El modelo elipsoidal de la Tierra WGS-84 :

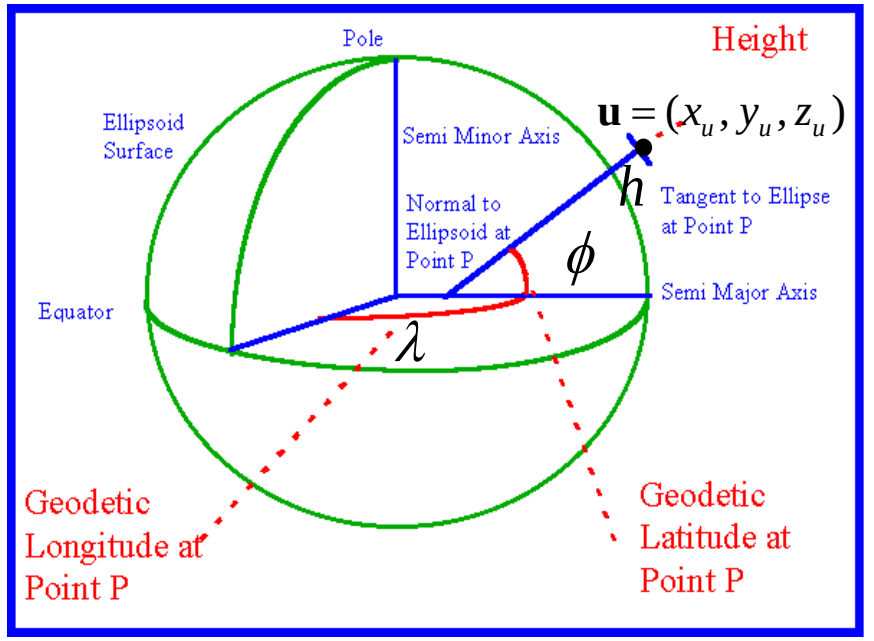


Algoritmo conversión ECEF a Longitud (λ)–Latitud (ϕ)–altura (h)

- Algoritmo directo:

$$\begin{cases} \lambda = \arctan 2(y_u, x_u) \\ \phi \approx \arctan\left(\dfrac{z_u + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3\theta}{p - e^2 \cdot a \cdot \cos^3\theta} \right) \\ h \approx \dfrac{p}{\cos\phi} - N(\phi) \end{cases}$$

(aproximación con 1 cm de error)



donde

$N(\phi) = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\phi}}$ radio de curvatura

$p = \sqrt{y_u^2 + x_u^2}$ $\quad \theta = \arctan\left(\dfrac{z_u \cdot a}{p \cdot b} \right)$ $\quad e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$

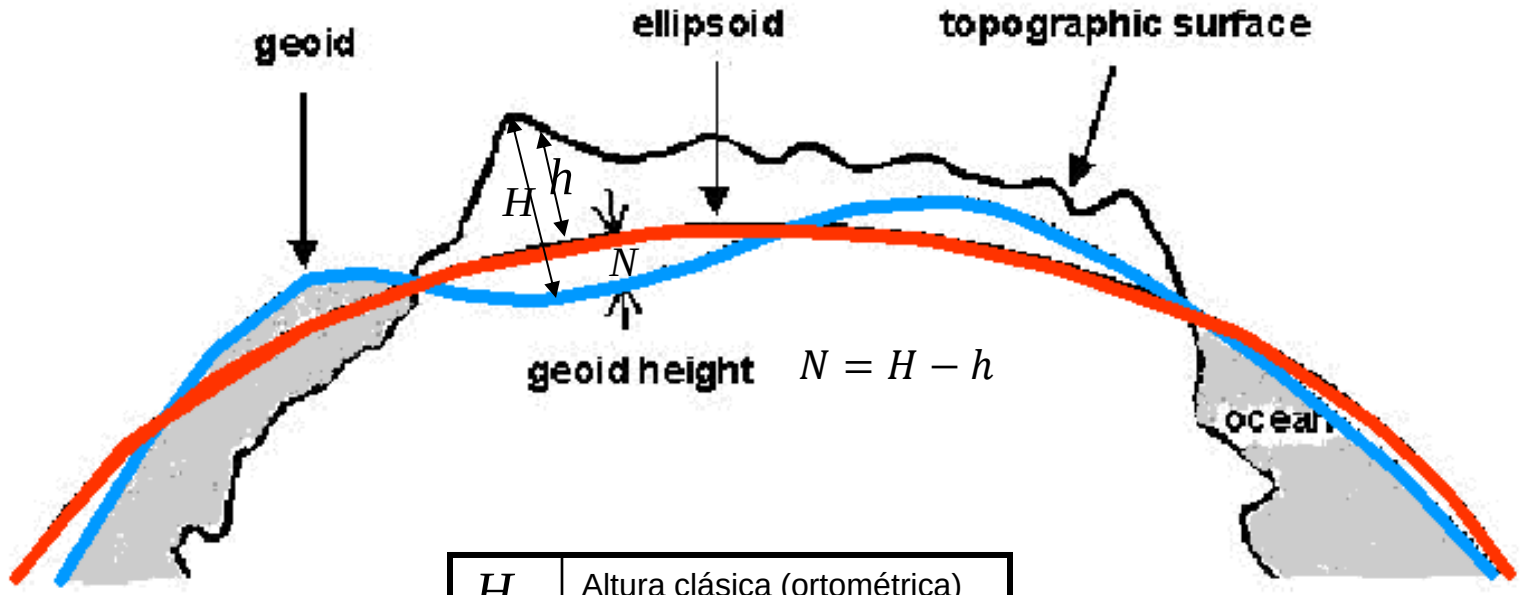
$f = \dfrac{a-b}{a}$ $\quad e^2 = 2f - f^2$

Excentricidad secundaria

- Algoritmo inverso:

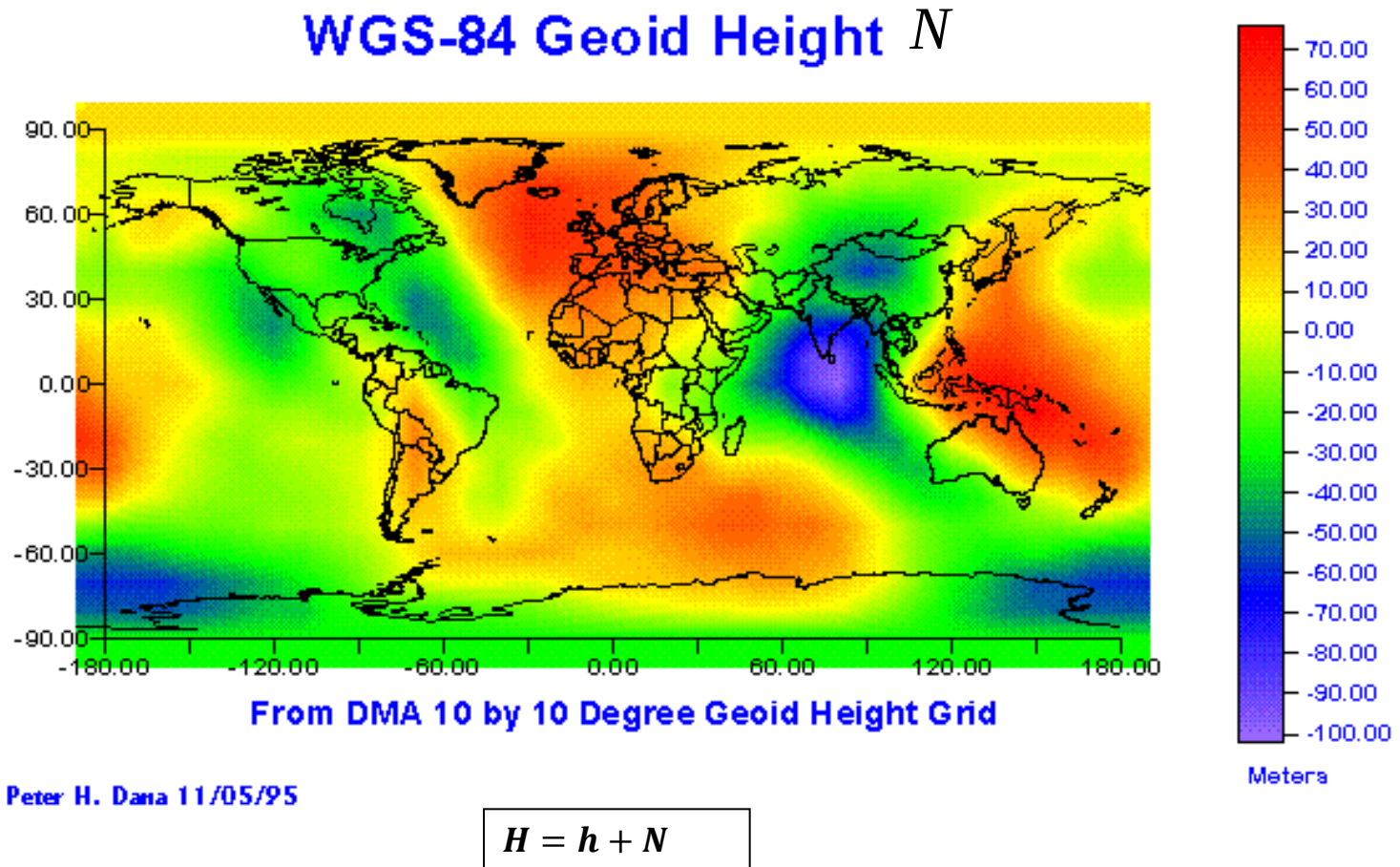
$$\begin{cases} x_u = (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ y_u = (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ z_u = [N(1-e^2)+h]\sin\phi \end{cases}$$

- Conversión de Altura Elipsoidal (h) a Altura geodésica (H)
  - La Geoide:
    - Superficie irregular, normal al campo gravitatorio (nivelada) y equipotencial (misma g) que coincide con el nivel medio del mar en los océanos



H	Altura clásica (ortométrica)
h	Altura elipsoidal (GPS)
N	Separación geoide-elipse o altura de geoide

- Conversión de h (altura GPS) a H (altura geodésica)



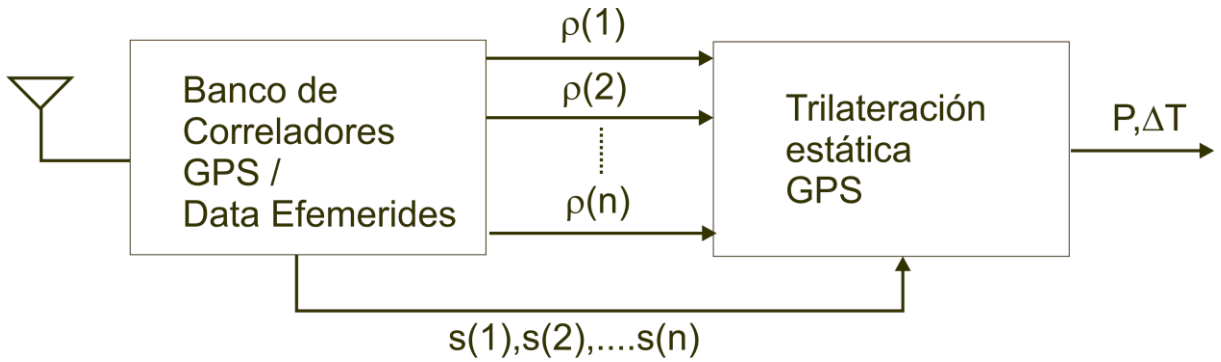
$$H = h + N$$

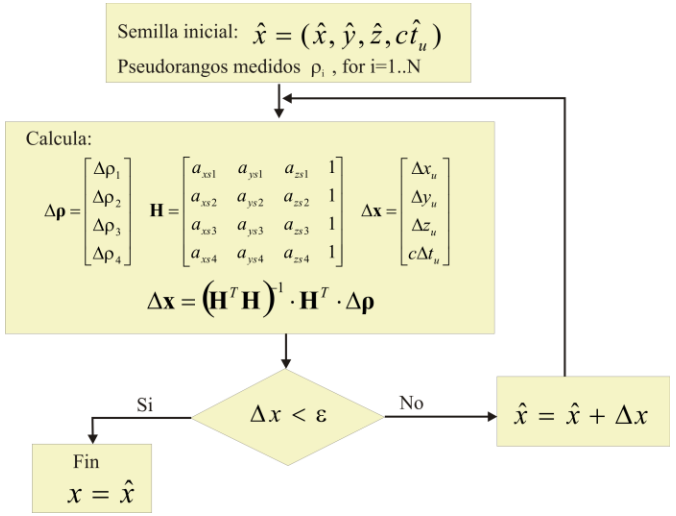
Tabla de contenidos

- 1. Fundamentos GPS
- 2. Localización con GPS y Trilateración Estática
- 3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro de Kalman
- 4. Navegación Inercial (INS) y su integración con GPS
- Referencias

3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro Kalman

- La trilateración estática:
  - Solo usa pseudorangos medidos en instante actual.
  - No usa su historia ni predice posiciones futuras.

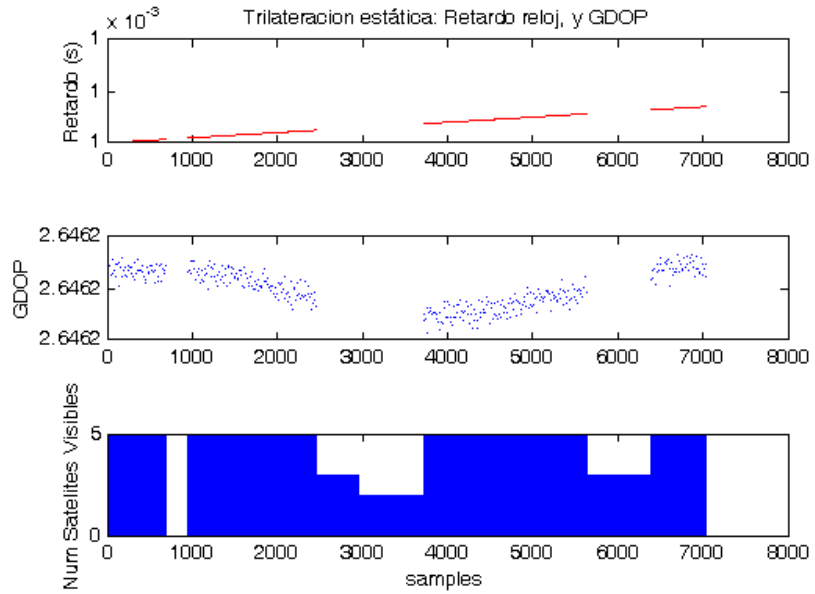


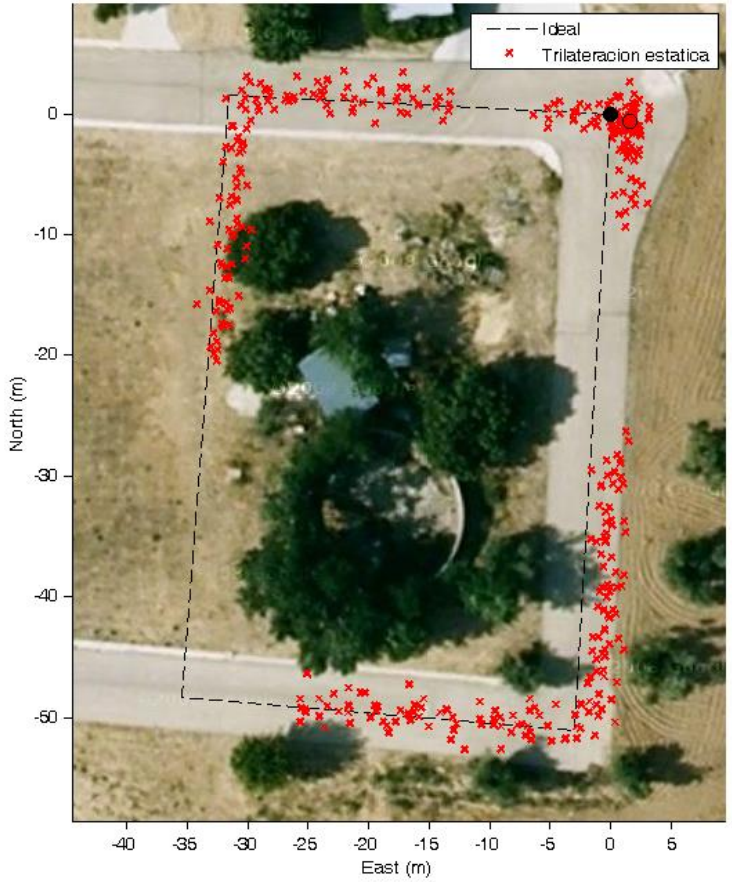


- Limitaciones de la Trilateración estática:
  - La estimación de PVT es **ruidosa** (no suavizada).Varianza de posición es proporcional a la varianza de los pseudorangos (DOP).
  - No puede estimar PVT (**no operativo**) si no señales o hay pocas disponibles (**de 0-3 pseudorangos**), (túneles, bosques, ciudades).
  - Ejemplos:…

3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro Kalman

- Limitaciones de la Trilateración estática:



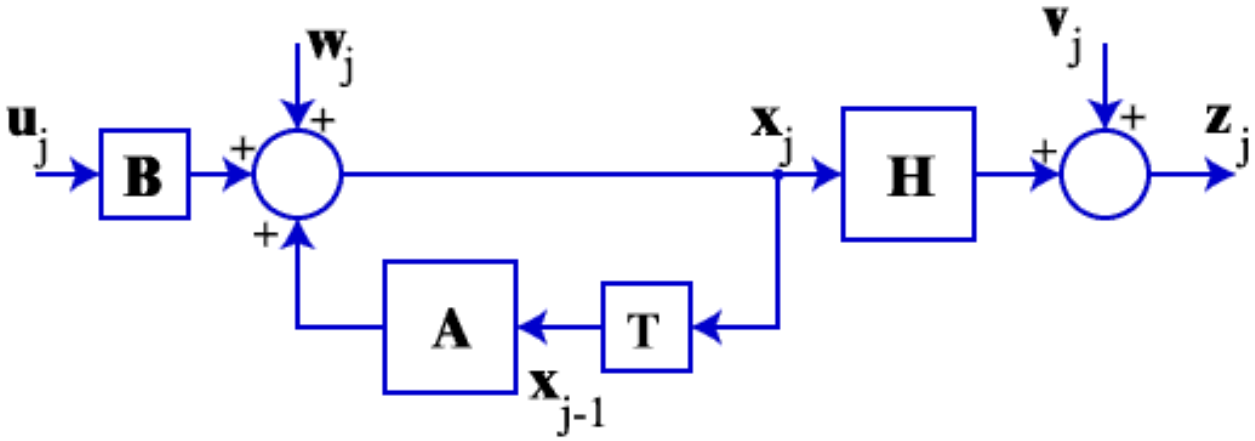


- Solución mejorada (Trilateración dinámica):
  - Filtrar las medidas crudas con: un vector de estado y un modelo (movimiento y medida), mediante un **filtro de Kalman**.

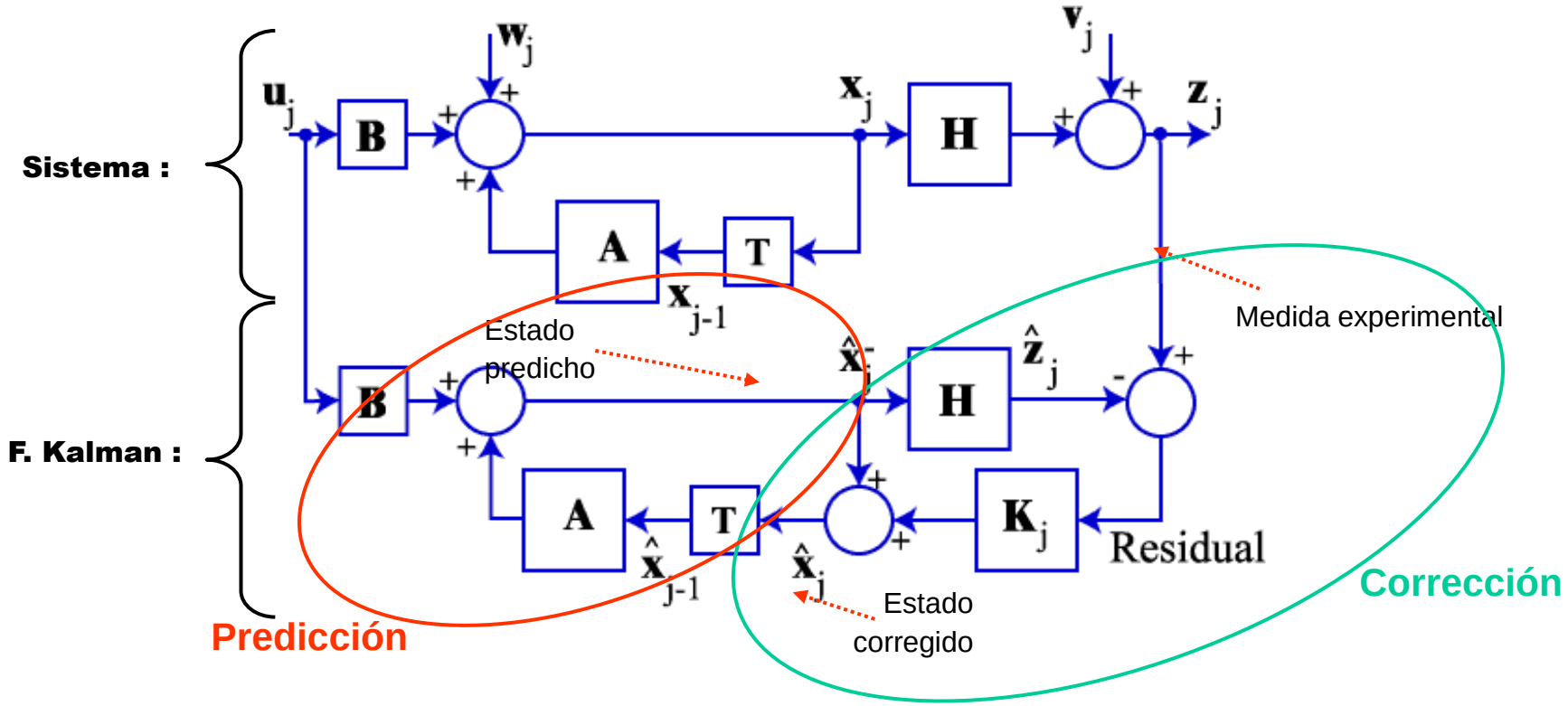
- **Filtro de Kalman**: Recordatorio
  - Sistema lineal en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_j + \mathbf{w}_j$$
$$\mathbf{z}_j = \mathbf{H}\mathbf{x}_j + \mathbf{v}_j$$

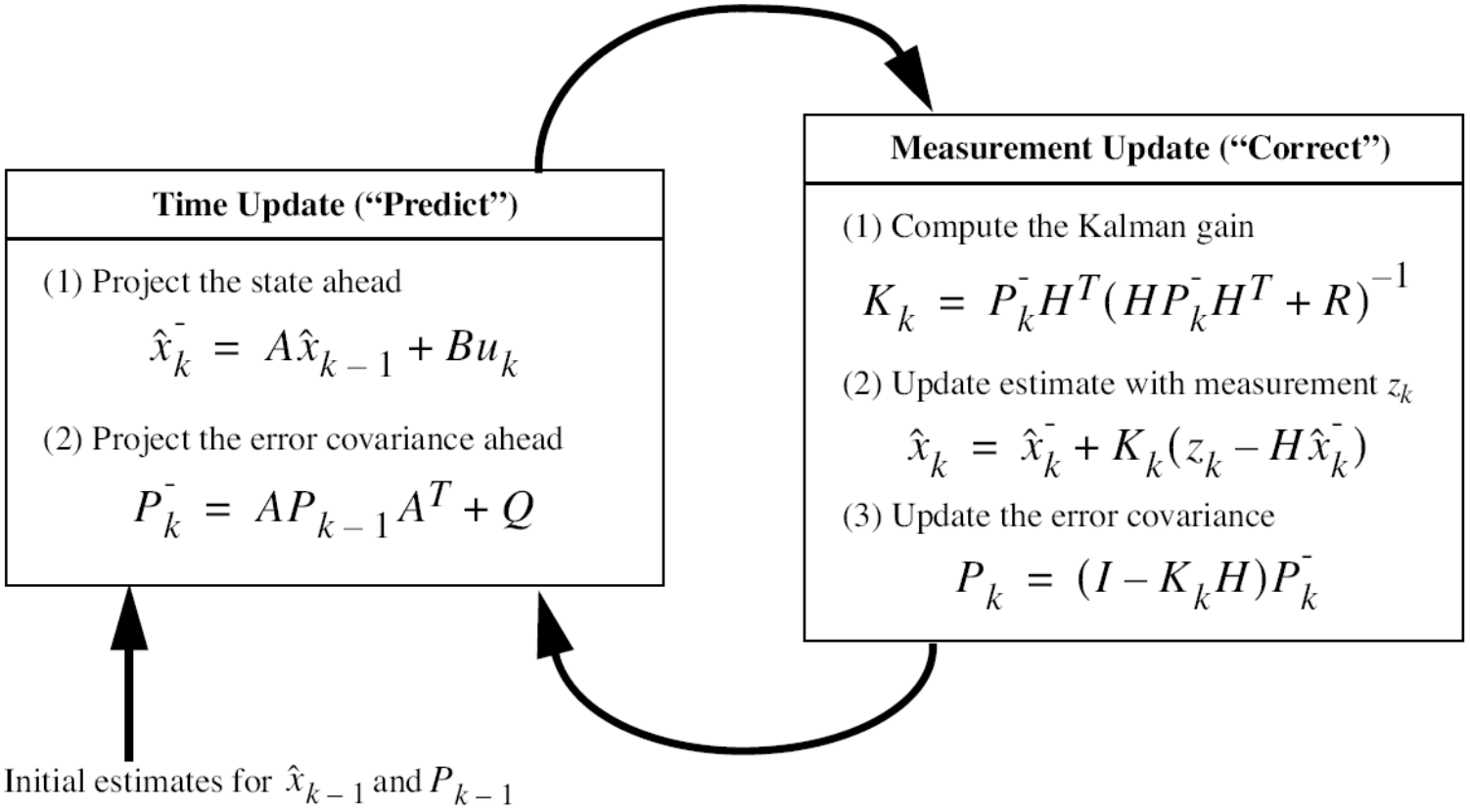
    - $\mathbf{x}_j$ es el estado interno del sistema
    - **A** es la matriz de transición de estados, **H** la de medida
    - donde $\mathbf{w}_j$ es el ruido de proceso y $\mathbf{v}_j$ el ruido de medida (**Q** y **R**)
    - $\mathbf{u}_j$ es una entrada al sistema, $\mathbf{z}_j$ es una medida sobre el sistema



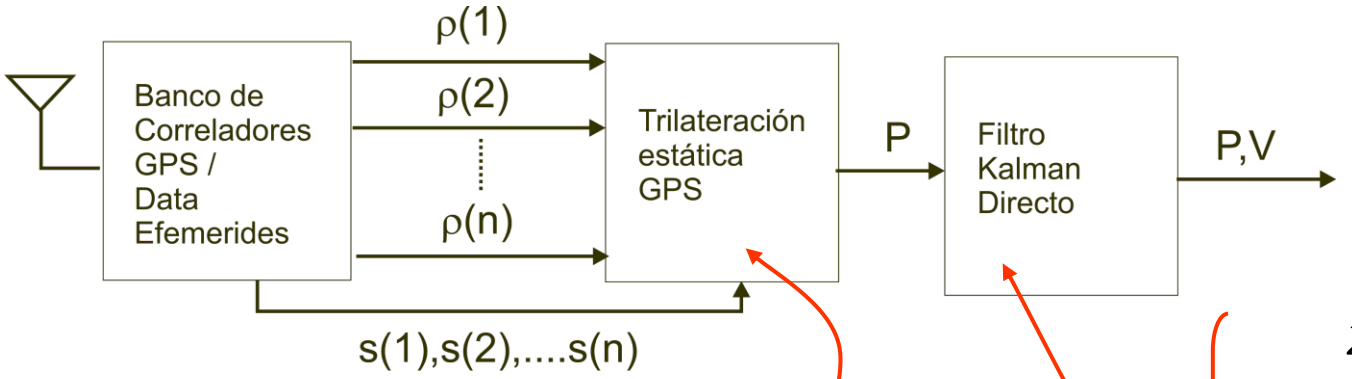
- **Filtro de Kalman**: Recordatorio
  - El filtro de Kalman mimetiza al sistema ideal para obtener una estimación del estado del sistema:
    - Con una etapa de predicción: $\hat{\mathbf{x}}_j^- = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}_{j-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_j$
    - y otra de corrección: $\hat{\mathbf{x}}_j = \hat{\mathbf{x}}_j^- + \mathbf{K}_j\left(\mathbf{z}_j - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_j^-\right)$

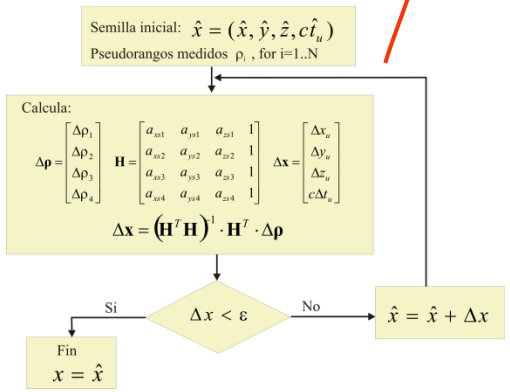


- **Filtro de Kalman**: Recordatorio
  - Ecuaciones necesarias:
    - Además de la de Predicción (x^-) y Corrección (x) del estado, también:
    - Matrices de covarianza de la estimación (P, P^-) que dependen de Q y R



- **Trilateración Dinámica <u>Desacoplada</u>**:
  - Es una trilateración estática seguida de un filtro de Kalman





$$x = [p, v, a]_{1x9}$$

$$A = \begin{bmatrix} I_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} & \frac{1}{2}\Delta T^2 \cdot I_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix}_{9x9}$$

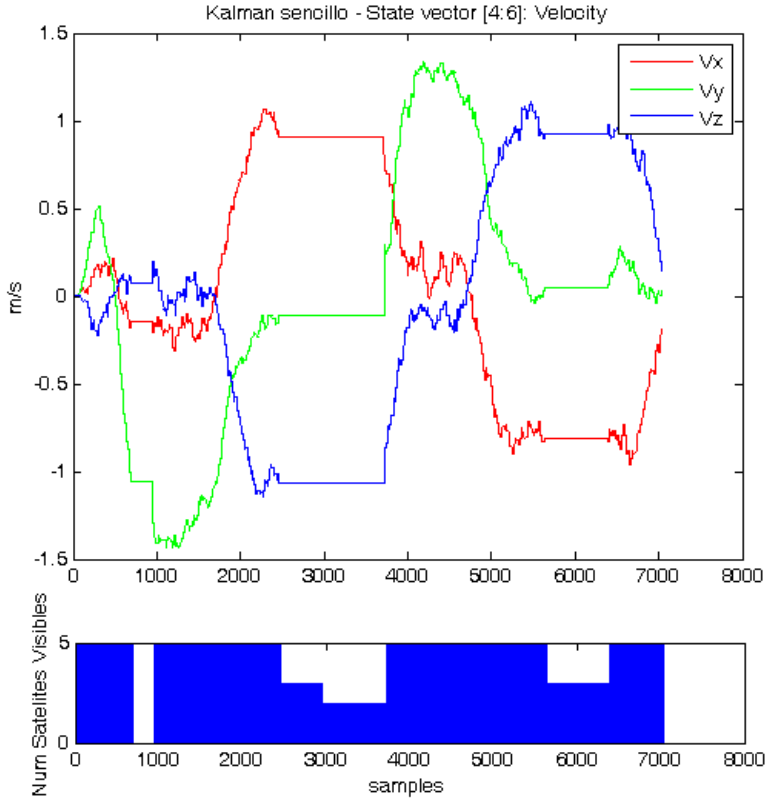
$$H = [I_{3x3}, 0_{3x3}, 0_{3x3}]_{3x9}$$

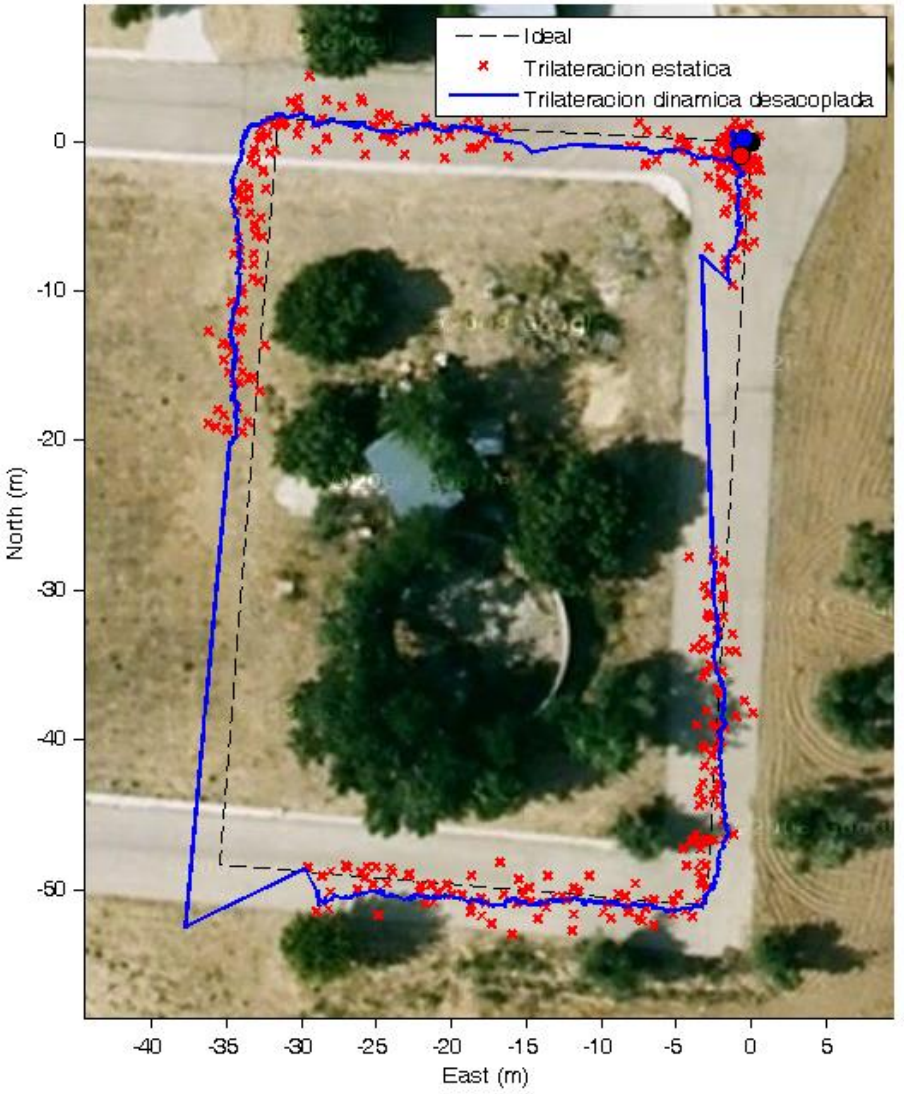
$$p = p_0 + v \cdot \Delta T + \frac{1}{2} a \cdot \Delta T^2$$

$$v = v_0 + a \cdot \Delta T$$

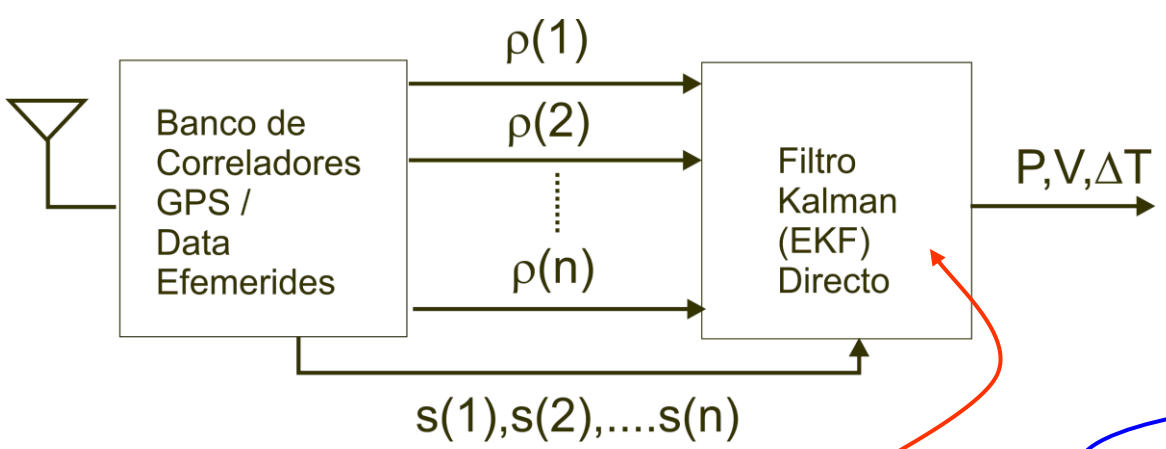
Modelo acel cte.

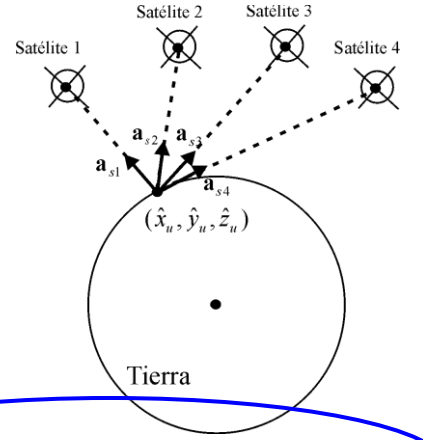
- **Trilateración Dinámica <u>Desacoplada</u>**:
  - Beneficios:
    - **Suaviza** las estimaciones de posición (disminuye su varianza).
    - **Predecir** (a muy corto plazo) posición con < 4 satélites a vista.





- **Trilateración Dinámica** Integrada:
  - El filtro de Kalman trabaja con los pseudorangos directamente, y “trilatera” internamente





$$\Delta\rho_j = a_{xsj}\Delta x_u + a_{ysj}\Delta y_u + a_{zsj}\Delta z_u + c\Delta t_u$$

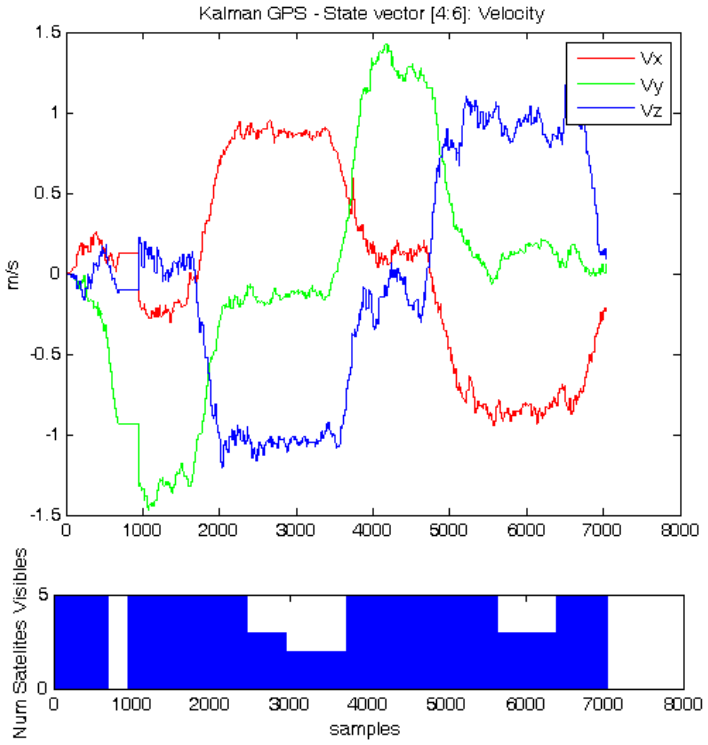
$$x = [\,p, v, a, t_u, \dot{t}_u\,]_{1x11}$$

$$A = \begin{bmatrix} I_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} & \frac{1}{2}\Delta T^2 \cdot I_{3x3} & 0 & 0 \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} & 0 & 0 \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{11x11}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{xs1} & a_{ys1} & a_{zs1} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 1 & 0 \\ a_{xs2} & a_{ys2} & a_{zs2} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 1 & 0 \\ a_{xs3} & a_{ys3} & a_{zs3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 1 & 0 \\ a_{xs4} & a_{ys4} & a_{zs4} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 1 & 0 \end{bmatrix}_{11xs}$$

3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro Kalman

- **Trilateración Dinámica** Integrada:
  - Beneficios:
    - Además de **suavizar**…
    - **Predice mucho mejor** con pocos pseudorangos (1-3 satélites en vista)



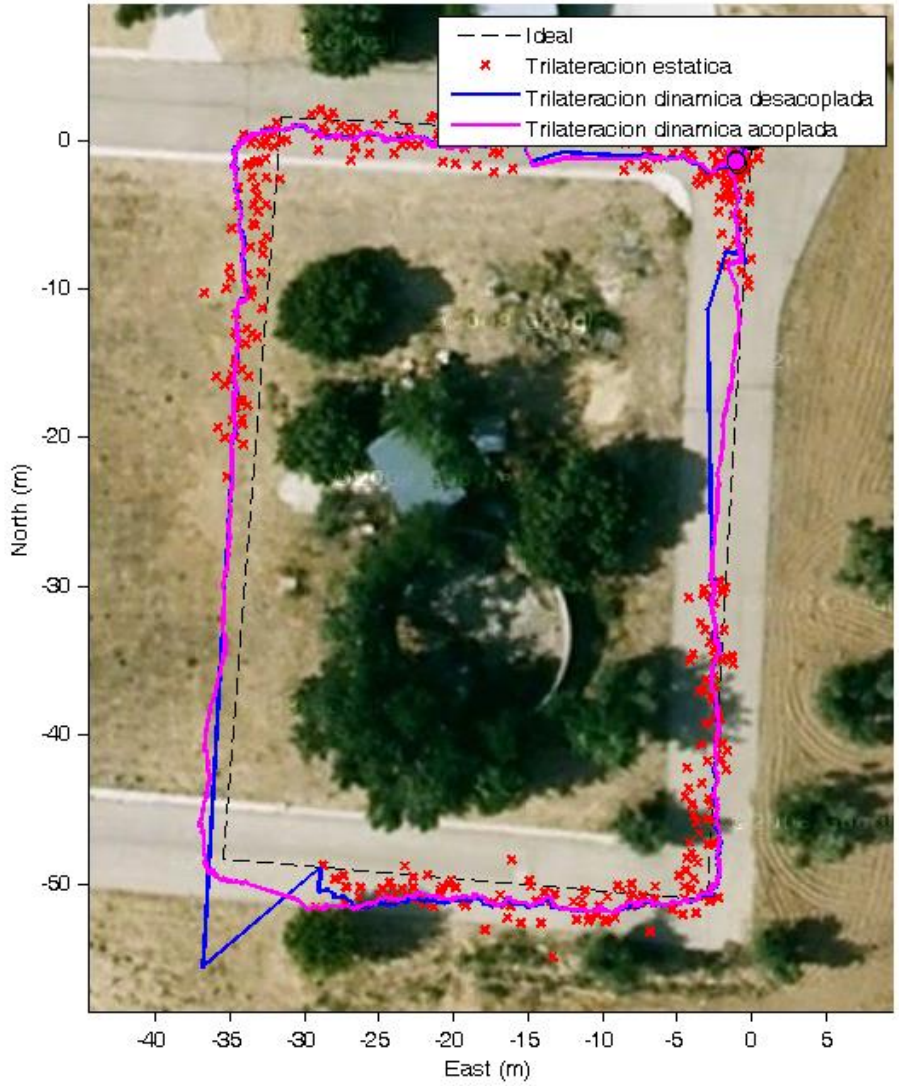


Tabla de contenidos

- 1. Fundamentos GPS
- 2. Localización con GPS y Trilateración Estática
- 3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro de Kalman
- 4. Navegación Inercial (INS) y su integración con GPS
- Referencias

¿Qué es la Navegación Inercial (INS)?:

- Se usa una IMU (Inertial Measurement Unit)
  - 3 acelerómetros (miden “specific force” [m/s^2], que incluye gravedad)
  - 3 giróscopos (miden “angular rate” [rad/s])
- Integra las señales de la IMU para obtener la solución de navegación: Posición, Velocidad y Orientación (mecanización INS)



- (*) Se asume conocida una posición y orientación inicial (es un método dead-reckoning)

- La orientación (Attitude):
  - Es la orientación angular en 3D entre el sistema de referencia solidario con la IMU (b-frame o body) respecto al sistema de referencia global (n-frame o navigation)
  - Se representa mediante:
    - Ángulos Euler / {Roll, Pitch, Yaw},
    - Direction Cosine Matrix (DCM): $\mathbf{R_b^n}$,
    - Cuatertiones, etc
  - El sistema de referencia global/navigation se puede elegir según convenga:
    - Inercial
    - ECEF
    - Local geografico, etc

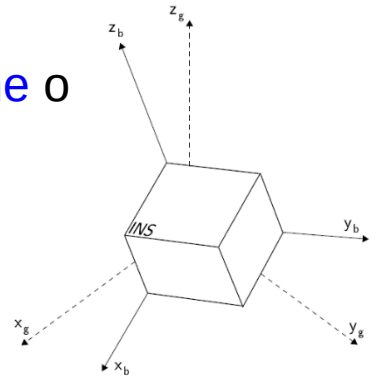


Figure 1: The body and global frames of reference.

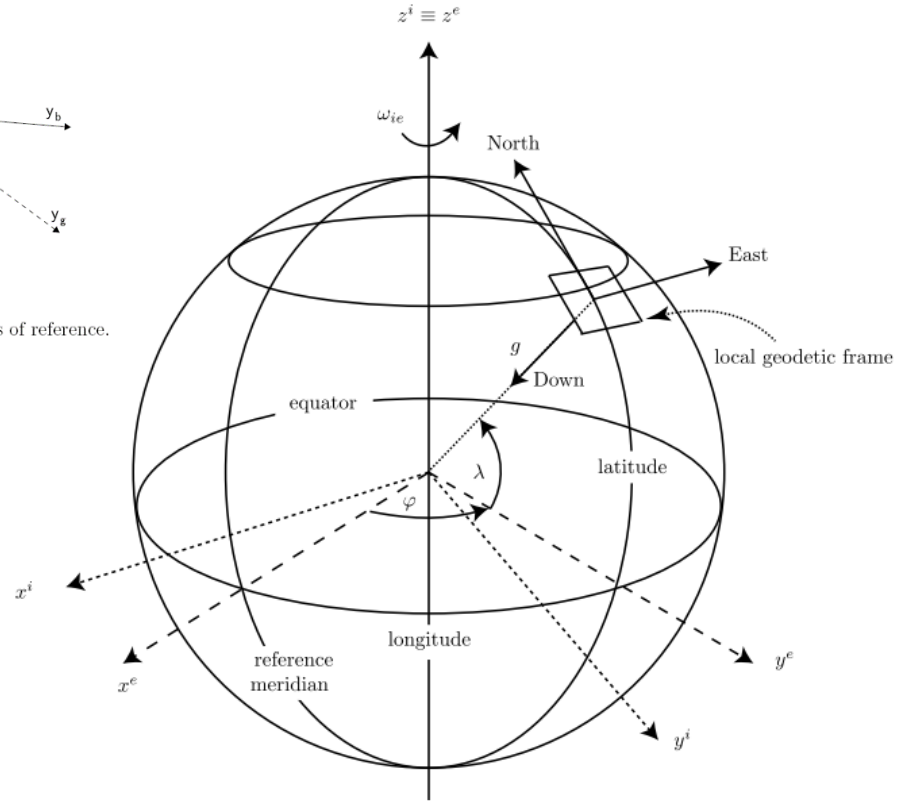
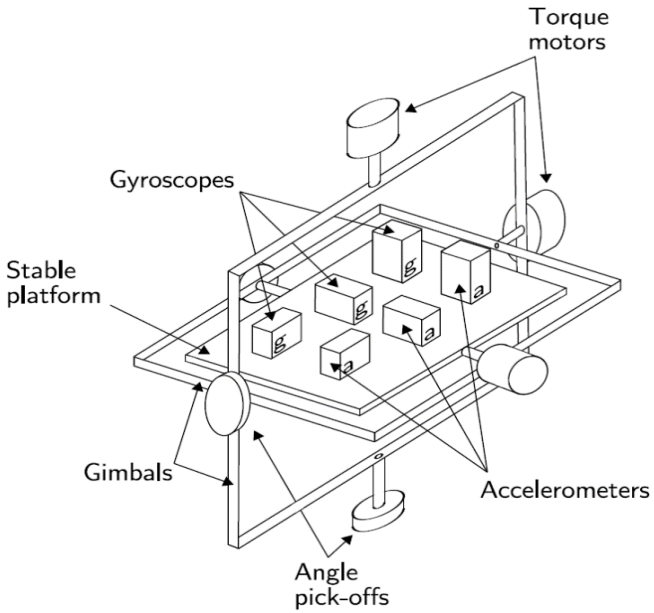
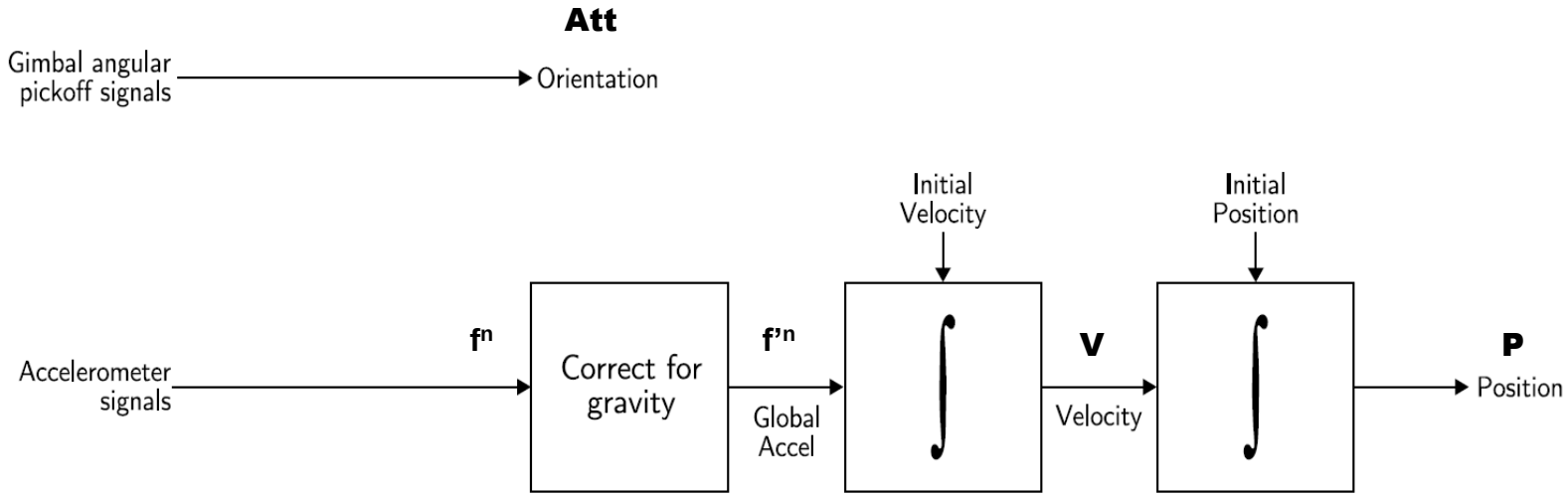


Figure 2.1: *Relations between ECEF(e-frame)-, local geodetic(t-frame)- and inertial(i-frame)-frame.*

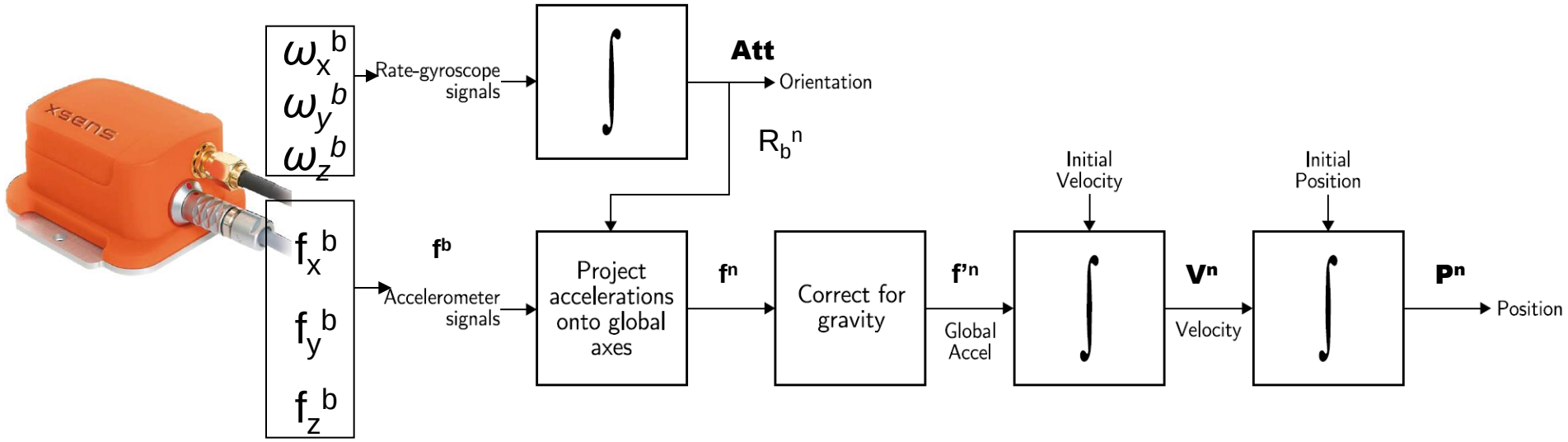
- Tipos de INS:
  - 1) INS sobre plataforma estabilizada
    - Plataforma, con 3 Acc y 3 Gyr, establilizada activamente con motores para mantener señal Gyros a cero.
    - Lectura angular de ejes (Roll,Pitch,Yaw) da directamente la Orientacion (Att o Attitude)
    - Las señales acelerómetro están directamente en n-frame => solo restar “gravedad”, e integrar doblemente para obtener V y P.







- Tipos de INS:
  - 2) Strap-down INS:
    - Sin plataforma estabilizada. Los 3 Acc y 3Gyr solidarios con cuerpo a medir.
    - Integrar velocidad angular (Gyro) para mantener orientación (Attitude: R_b^n)
    - Transformar la fuerza específica (f^b) medida por los acelerómetros en b-frame a n-frame (f^n) usando Attitude.
    - Eliminar gravedad (g) a esa aceleración (f^n), obteniendo: f'^n
    - Integrar f'^n para obtener la velocidad (V^n), y otra vez para posición (P^n)



- Tipos de INS:
  - 2) Strap-down INS. **Implementación en Matlab**

```
%-------------------------------------------------------------------------
%  INS
%  Acc: IMU Acelerometer signal (3 axis) [m/s^2]
%  Gyr: IMU Angular Rate signal (3 axis) [rad/s]
%  fs:  Frecuencia muestreo [Hz]

% Actualizar matriz de orientación con valores de los "Gyros"
SkewGyros=[0 -Gyr(i,3)  Gyr(i,2);...
        Gyr(i,3)  0  -Gyr(i,1);...
        -Gyr(i,2) Gyr(i,1) 0]*pi/180; % rad/s
Rot_nb(:,:,i)=Rot_nb(:,:,i-1)*(2*eye(3)+SkewGyros/fs)*inv(2*eye(3)-SkewGyros/fs); % Pade(1,1)

%.........................................................
% Transformar medidas sensoriales de "b-frame" a "n-frame"
Acc_n(i,:)=(Rot_nb(:,:,i)*Acc(i,:)')';  %(en "n-frame": Noth-West-Up)

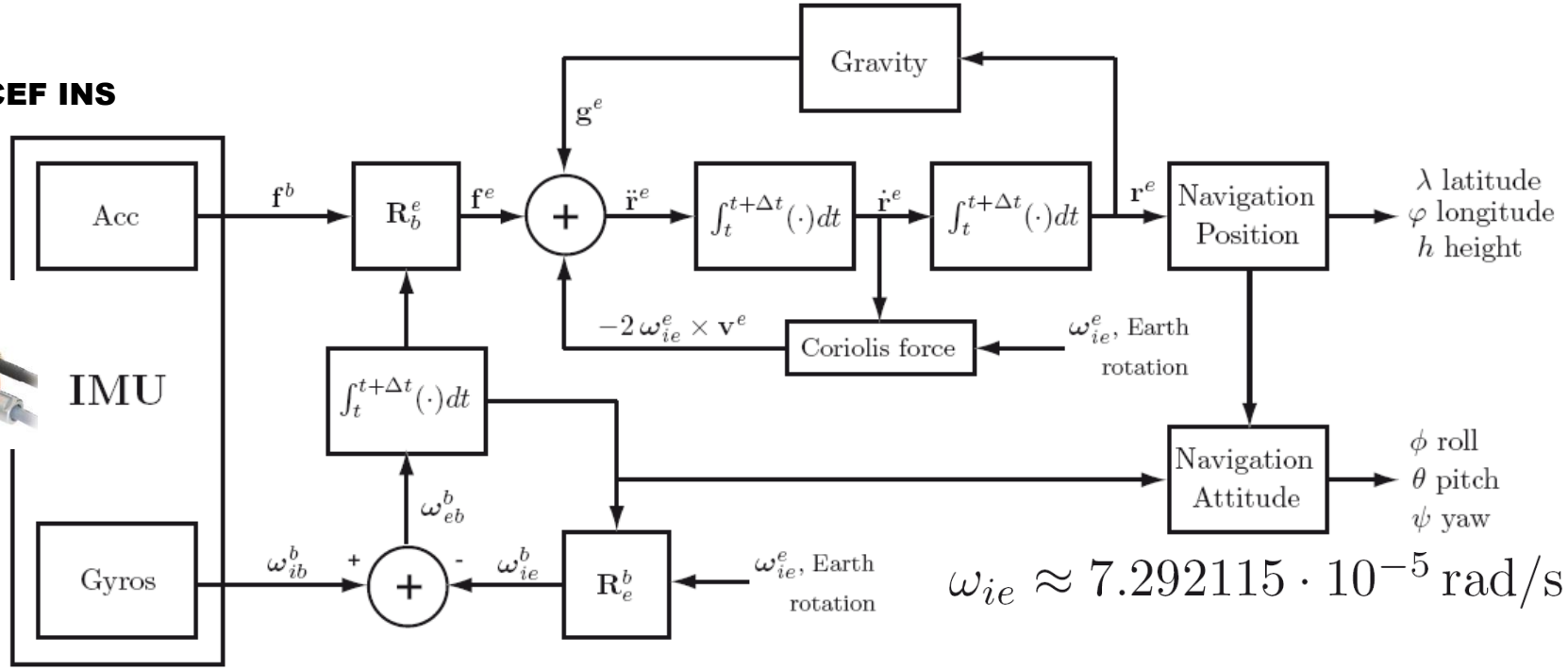
%.........................................................
% Eliminar gravedad terrestre (que se lee en acelerómetros)
Acc_n_sin_g(i,:)=Acc_n(i,:) - [0 0 gravedad];  %(en "n-frame": Noth-West-Up)

%.........................................................
% Integrar doblemente aceleraciones (ahora ya sin la gravedad)
Vel_n(i,:)=Vel_n(i-1,:) + 0.5*(Acc_n_sin_g(i,:)+Acc_n_sin_g(i-1,:))/fs;  % integracion trapezoidal
Pos_n(i,:)=Pos_n(i-1,:) + 0.5*(Vel_n(i,:)+Vel_n(i-1,:))/fs;  % integracion trapezoidal
```

- Nota: Un **strap-down INS "preciso"** debe tener en cuenta que la Tierra gira y es un sistema de referencia no inercial:
  - Aparece la fuerza de Coriolis que se acopla a las aceleraciones
  - La rotación de la Tierra se acopla en las medidas del giróscopo



ECEF INS



$$\omega_{ie} \approx 7.292115 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

Ecuaciones de navegación ECEF:

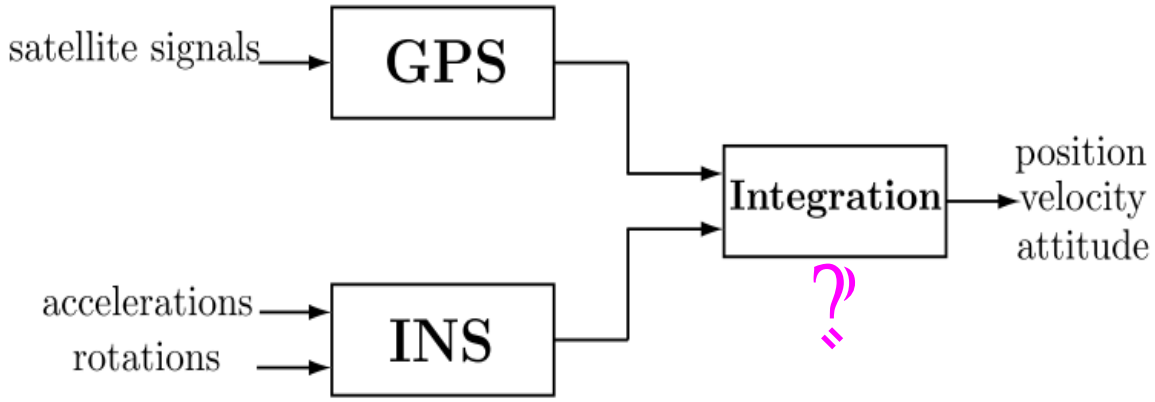
$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^e \\ \dot{\mathbf{v}}^e \\ \dot{\mathbf{R}}_b^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}^e \\ -2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e\,\mathbf{v}^e + \mathbf{g}^e + \mathbf{R}_b^e\,\mathbf{f}^b \\ \mathbf{R}_b^e\,\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \end{bmatrix}$$

Integración INS y GPS (1/5)

- Propiedades de cada solución por separado:

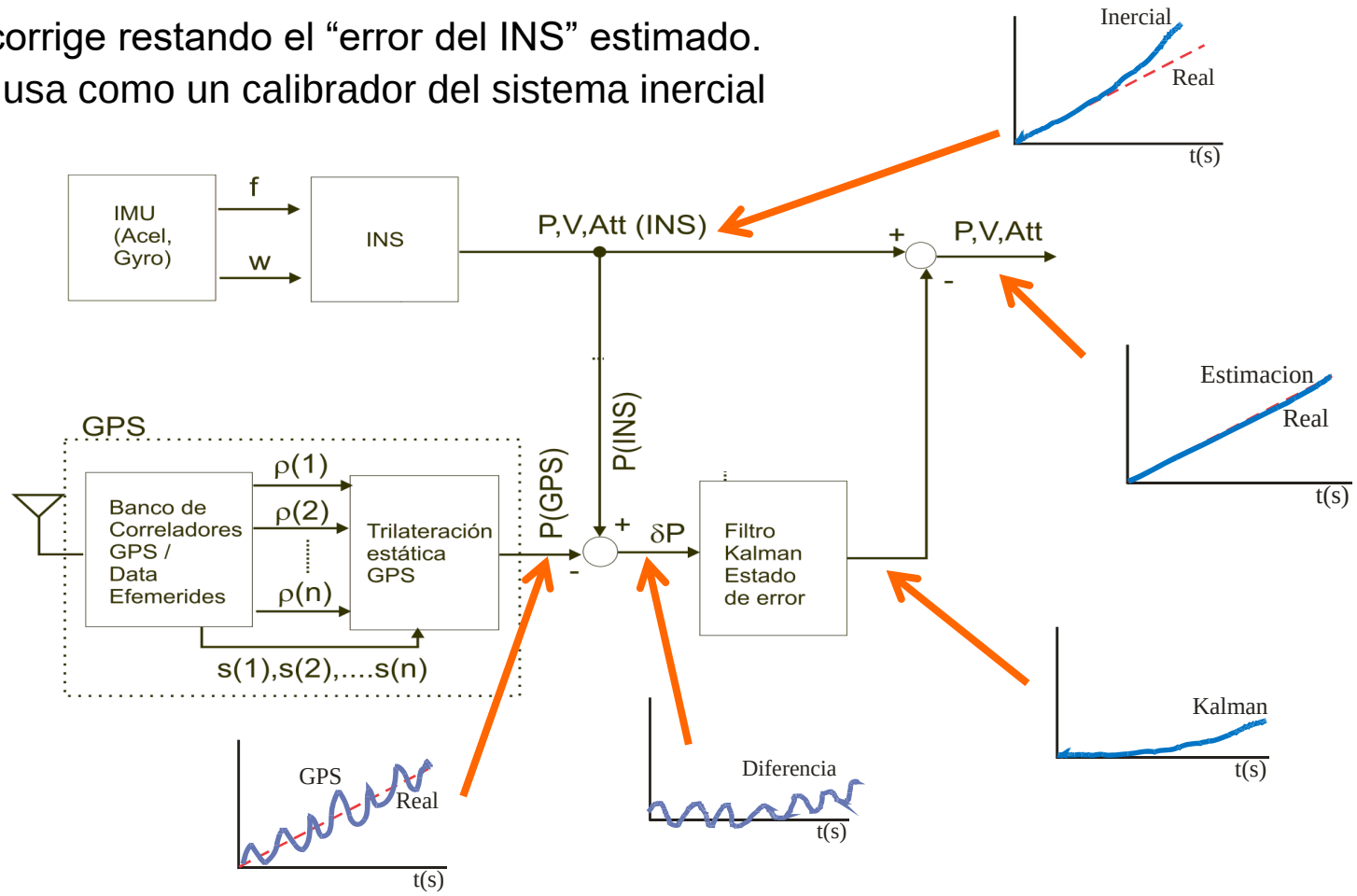
GPS	INS
Posición absoluta sin derivas	Posición (Velocidad y Orientación) con derivas (Dead-reckoning)
Frecuencia medida baja (1-5 Hz)	Frecuencia medida alta (>100 Hz)
Estimaciones no continuas (no disponible si señal GPS bloqueada)	Estimación continua (señal acelerómetros y giróscopos siempre disponibles)

- Beneficios de integrar GPS + INS:
  - 1) Localización absoluta (sin derivas),
  - 2) Alta frecuencia de medida (>100Hz),
  - 3) Localización continua (incluso sin señal GPS).



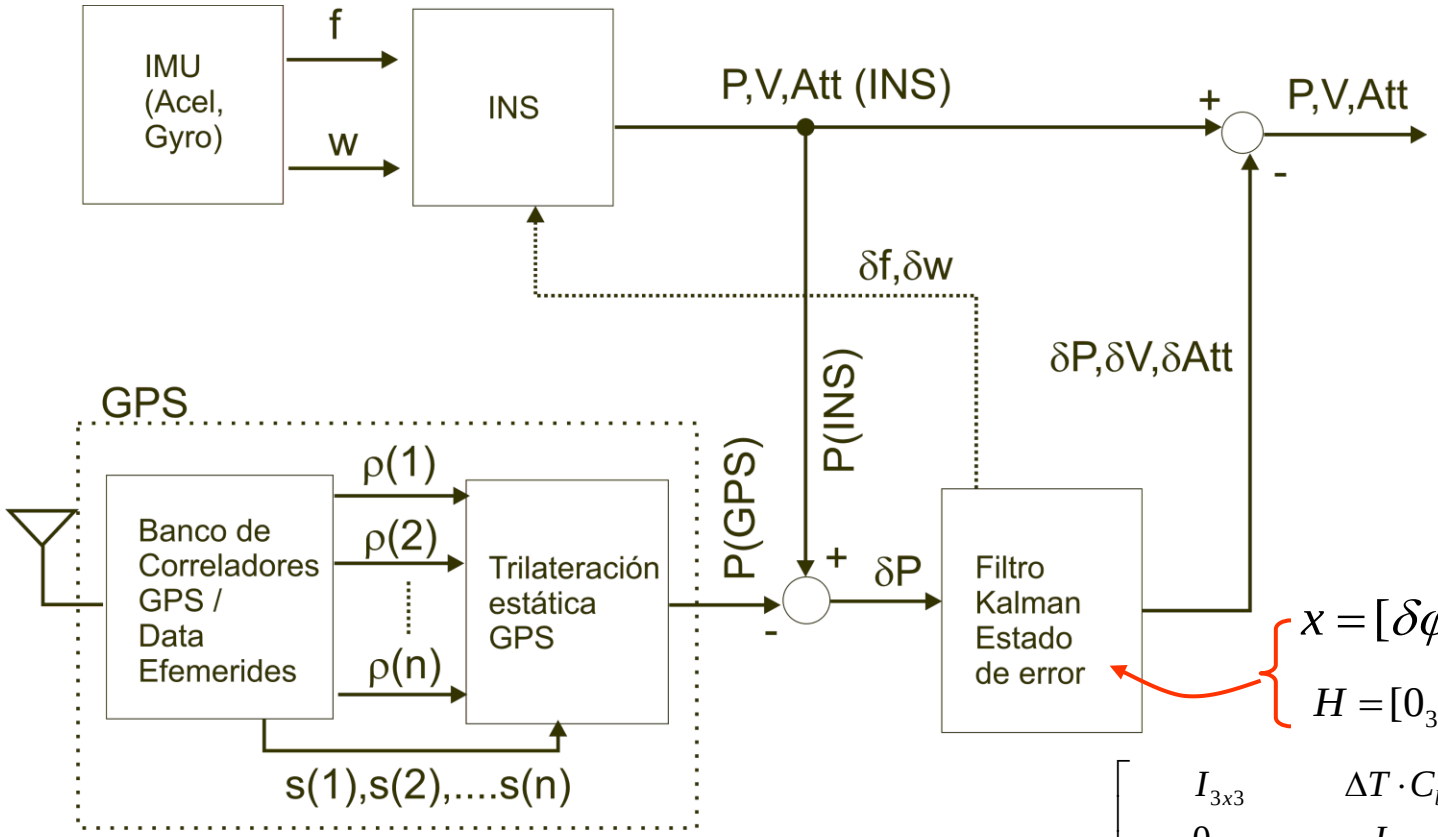
Integración INS y GPS (2/5)

- Integración INS/GPS: Idea base
  - Alimentar filtro de Kalman con las “diferencias” de estimación entre INS y GPS => Kalman estima el “error del INS”
  - El INS se corrige restando el “error del INS” estimado.
  - El GPS se usa como un calibrador del sistema inercial



Integración INS y GPS (3/5)

- Integración INS/GPS “débil” (loose)

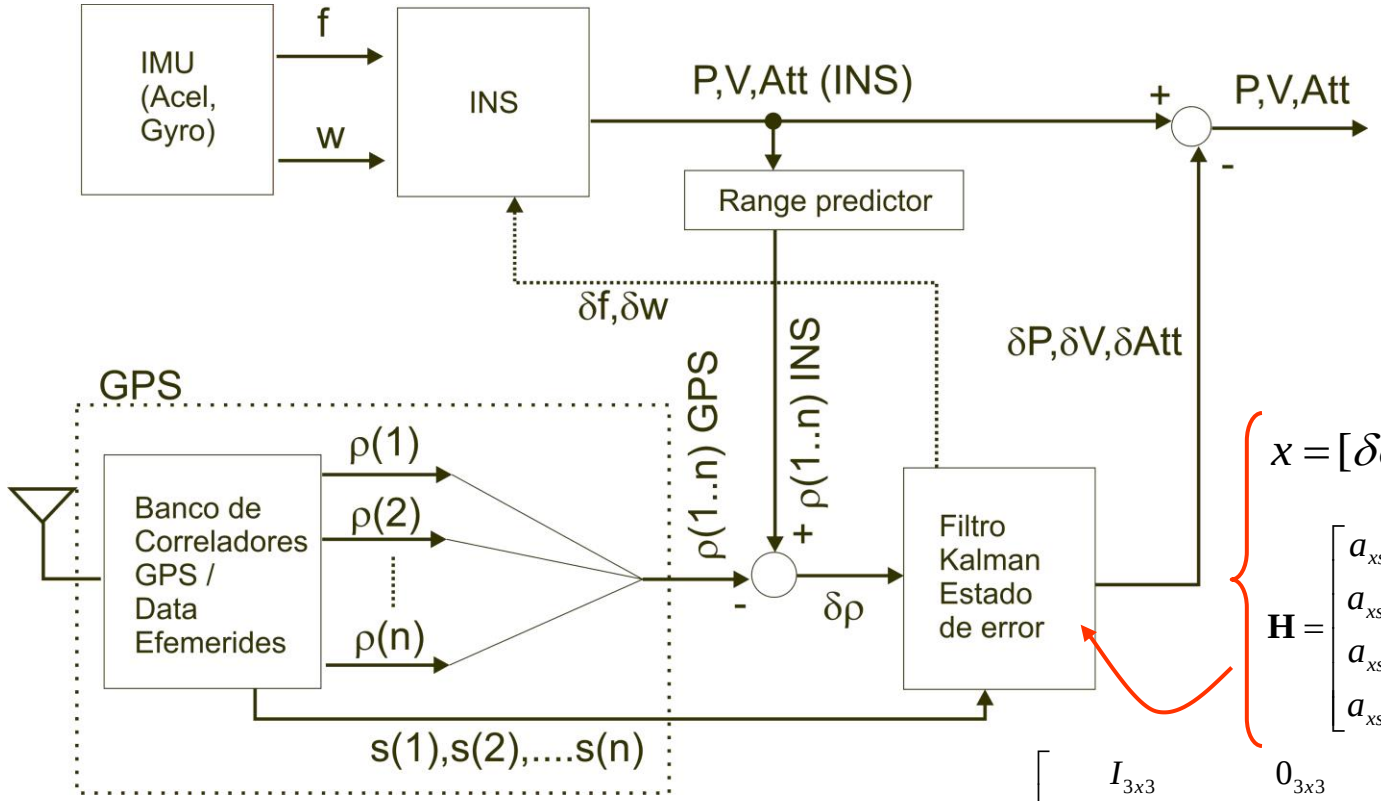


$$x = [\delta\varphi, \delta\omega^b, \delta p, \delta v, \delta a^b]_{1x15}$$

$$H = [0_{3x3}, 0_{3x3}, I_{3x3}, 0_{3x3}, 0_{3x3}]_{3x15}$$

$$A = \begin{bmatrix} I_{3x3} & \Delta T \cdot C_b^n & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} & 0_{3x3} \\ -\Delta T \cdot S(a^n) & 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & \Delta T \cdot C_b^n \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix}$$

- Integración INS/GPS “fuerte” (tight) :

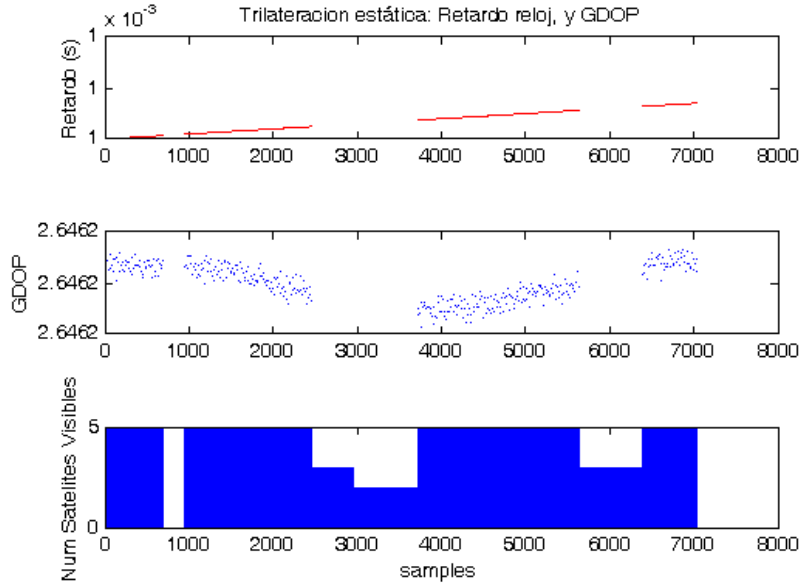


$$x = [\delta\varphi, \delta v, \delta a^b, \delta\omega^b, \delta p, \delta t]_{1x16}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{xs1} & a_{ys1} & a_{zs1} & 1 \\ a_{xs2} & a_{ys2} & a_{zs2} & 1 \\ a_{xs3} & a_{ys3} & a_{zs3} & 1 \\ a_{xs4} & a_{ys4} & a_{zs4} & 1 \end{bmatrix} \bullet [0_{4x12} \quad I_{4x4}]$$

$$A = \begin{bmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & \Delta T \cdot C_b^n & 0_{3x1} \\ -\Delta T \cdot S(a^n) & I_{3x3} & 0_{3x3} & \Delta T \cdot C_b^n & 0_{3x3} & 0_{3x1} \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x1} \\ 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x1} \\ 0_{3x3} & \Delta T \cdot I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x1} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & I_{1x1} \end{bmatrix}$$

- Integración INS/GPS
  - Beneficios:
    - Suavizado mejorado
    - Estimación sin GPS disponible
    - Frecuencia refresco: >100 Hz
  - Limitaciones:
    - Con una IMU tipo MEMS de bajas prestaciones con ruido y bias (no bien calibrado) =>INS fiable solo unos pocos seg.)



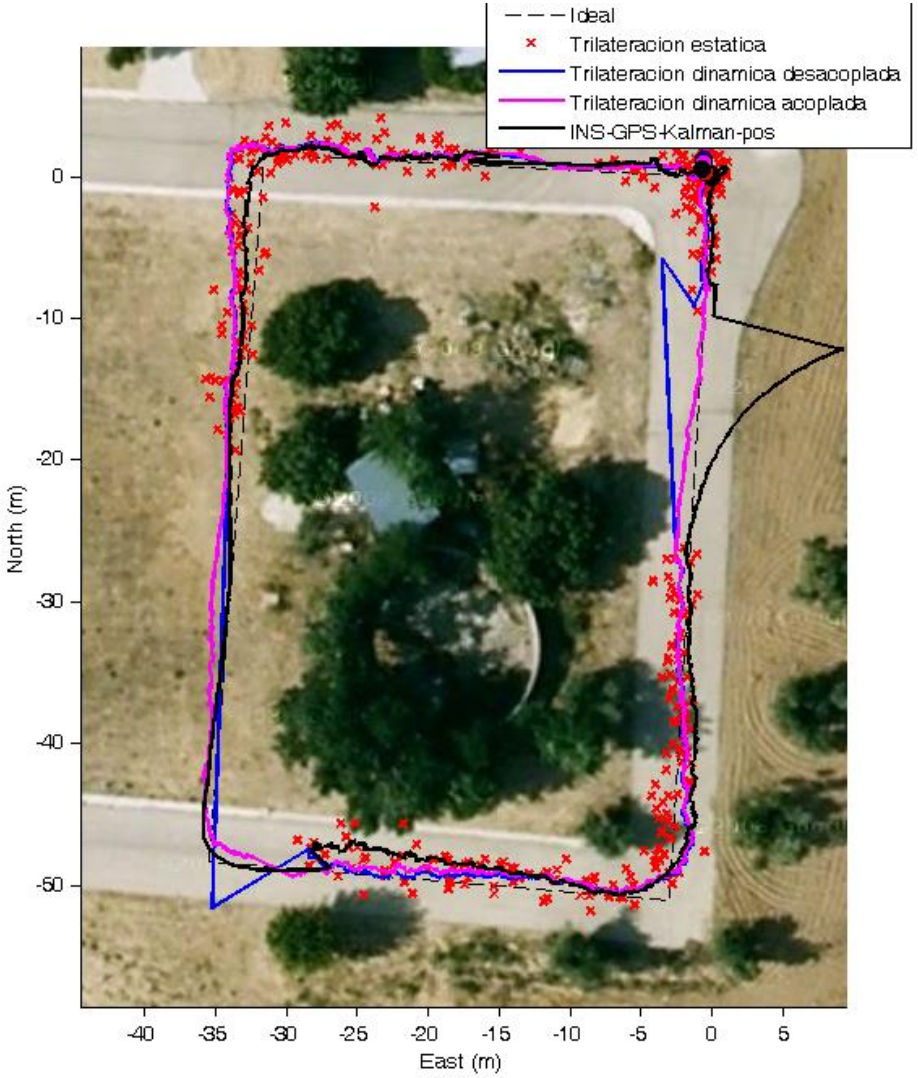
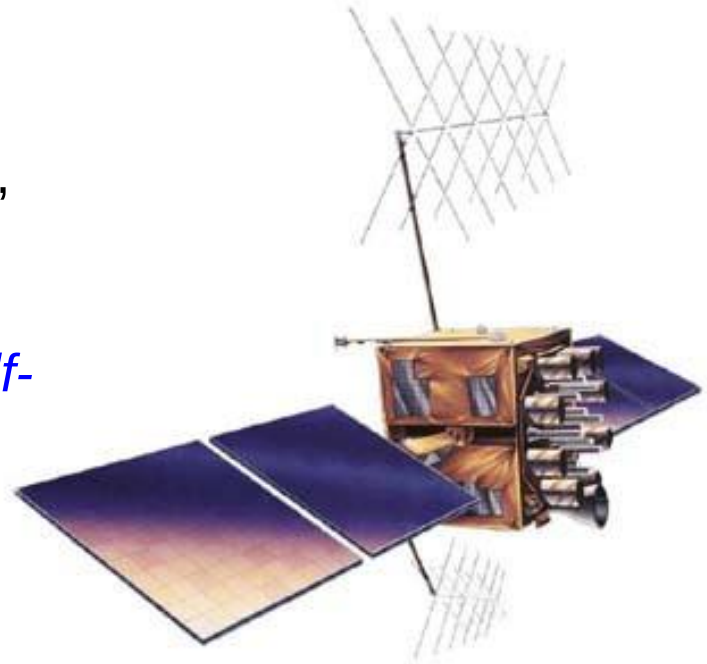


Tabla de contenidos

- 1. Fundamentos GPS
- 2. Localización con GPS y Trilateración Estática
- 3. Trilateración dinámica en GPS: Filtro de Kalman
- 4. Navegación Inercial (INS) y su integración con GPS
- Referencias

Referencias

- Kaplan E.D., *Understanding GPS: Principles and Applications*, Artech House Publishers, 2017.
- Pratap Misra y Per Enge, *Global Positioning System. Signals, Measurements and Performance.* Ganga-Jamuna Press, 2010.
- Peter H. Dana, *Global Positioning System Overview,* http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_ftoc.html
- J.A. Farrell, The global Positioning System and Inertial Navigation, McGraw Hill, 1999
- Chatfield, Fundamentals of high Accuracy Inertial Navigation, AIAA, 1997
- Titterton, *Strapdow Inertial Navigation Technology,2004*
- *A.M. Shkel , Y. Wang. Pedestrian Inertial Navigation with Self-Contained Aiding, (2021)*



Vídeos divulgativos

- ¿Cómo funciona el **GPS** 🛰️Qué es el GPS? (2022)
  https://www.youtube.com/watch?v=7GnLXJiCKUI
- *What is **GNSS/RTK** technology and how does it work?*
  https://www.youtube.com/watch?v=k49sUW7vkY4
- *The GENIUS of **Inertial Navigation** Systems Explained*
  https://www.youtube.com/watch?v=Pq_PDaYclAw
- *How it works - Aviation **Inertial Reference System** - Autonomous navigation without GPS*
  https://www.youtube.com/watch?v=Uho3RxBvWMY
- *How **Inertial Navigation** Changed Air, Sea & Space Travel for Ever?*
  https://www.youtube.com/watch?v=SqjGK1VYfwM

